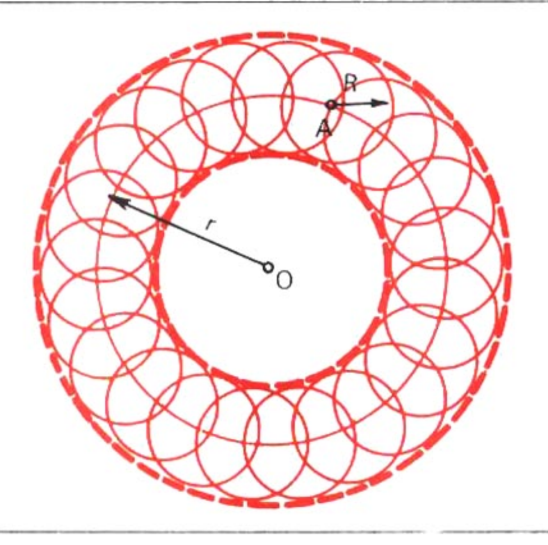
Lecciones populares de matemáticas

LA ENVOLVENTE

V. G. Boltianski



Editorial MIR  Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОГИБАЮЩАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V. G. BOLTIANSKI

LA ENVOLVENTE

TRADUCIDO DEL RUSO POR
EL INGENIERO V. LLANOS MÁS

EDITORIAL
MIR MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS. 1977

На испанском языке

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2. 129820, Moscú, I–110, GSP, URSS.

INDICE

PRÓLOGO DEL AUTOR

La noción de envolvente se encuentra en las diversas partes de la denominada matemática "superior". La búsqueda de las envolventes generalmente se efectúa mediante la operación de diferenciación, una de las operaciones fundamentales de la matemática superior. Al mismo tiempo, el concepto de envolvente también es muy evidente geométricamente, y puede ser aclarado con ejemplos sencillos comprensibles para los alumnos de los grados superiores.

En este libro pequeño, basándose en el material de la mecánica (movimentos uniforme y uniformemente acelerado, rodadura) se examinan varios ejemplos interesantes de construcción de las envolventes. En calidad de tales aparecen curvas notables que encontramos frecuentemente en la matemática y en las aplicaciones de ésta: la parábola (capítulo I), la hipérbola (capítulo II), la astroide y la cicloide (capítulo III). En el cuarto capítulo, que es concluyente, se da la explicación de la noción general sobre la envolvente. En este mismo se muestra el procedimiento general para la búsqueda de las envolventes y, con tal motivo, se expone una descripción breve de la operación de diferenciación.

El primer capítulo incluye el material de la conferencia que, a petición de los dirigentes de los círculos matemáticos escolares adjuntos a la Universidad estatal de Moscú, leyó el autor hace algunos años.

Para comprender el material fundamental del libro es suficiente tener conocimientos en el conjunto del octavo grado de la escuela secundaria.

Aprovecho la ocasión para expresar mi más sincero agradecimiento a A. N. Efímov e I. M. Yaglom por sus consejos e indicaciones.

V. G. Boltianski

CAPÍTULO I

PARÁBOLA DE SEGURIDAD

1. MOVIMIENTO DE UN CUERPO LANZADO BAJO UN ÁNGULO RESPECTO AL HORIZONTE

Supongamos que un cuerpo de pequeñas dimensiones (punto material) se mueve libremente sobre la superficie terrestre. Para tener una idea correcta respecto al movimiento de este cuerpo se debe tomar en consideración la acción sobre él de todas las fuerzas, y en primer lugar, la de gravedad y otras, provocadas por la influencia del ambiente aéreo. Estas últimas en ciertos casos son de importancia esencial, mientras que en otros su influencia no es tan perceptible. Por ejemplo, cuando estudiamos el vuelo de un planeador no podemos despreciar dichas fuerzas puesto que, precisamente, el aire "sostiene" al planeador. Por el contrario, durante el movimiento de un proyectil de artillería o de un cohete balístico la influencia de la fuerza de resistencia del aire es menos importante. En la fig. 1 se expone el tipo aproximado de la trayectoria de un proyectil en el aire (la línea continua es la llamada *curva balística*) y la línea por la que volaría el proyectil bajo la influencia única de la fuerza de la gravedad.

En lo sucesivo examinaremos precisamente semejante movimiento de los cuerpos, "simplificado" e idealizado, bajo la acción única de la fuerza de gravedad, es decir, desatenderemos de la influencia del ambiente aéreo sobre el cuerpo y de otras fuerzas menos importantes (digamos, las fuerzas del magnetismo terrestre, las fuerzas de atracción de la Luna, del Sol y de las estrellas, etc). Consideraremos que la fuerza de la gravedad $P = mg$ es constante y está dirigida verticalmente hacia abajo. De tal guisa, aceptamos que la única fuerza que acciona sobre un cuerpo lanzado es la fuerza de la gravedad, y que su acción consiste en la comunicación al cuerpo de una aceleración g constante en magnitud y dirección.

Designemos por L la línea por la que se mueve el cuerpo lanzado (trayectoria de su movimiento). En cada momento de tiempo el cuerpo móvil se encuentra en algún punto de esta trayectoria

y tiene una *velocidad del movimiento* determinada. La velocidad es un *vector* (magnitud dirigida) de dirección *tangencial* a la trayectoria L. En el caso dado esto significa que toda la trayectoria L está situada hacia un mismo lado respecto a la recta por la que va dirigido el vector de la velocidad v (fig. 2).

Haciendo uso de la regla del paralelogramo la velocidad del cuerpo lanzado puede ser descompuesta en dos componentes: una vertical y otra horizontal. La aceleración g, por estar dirigida verticalmente, no puede variar la componente horizontal de la

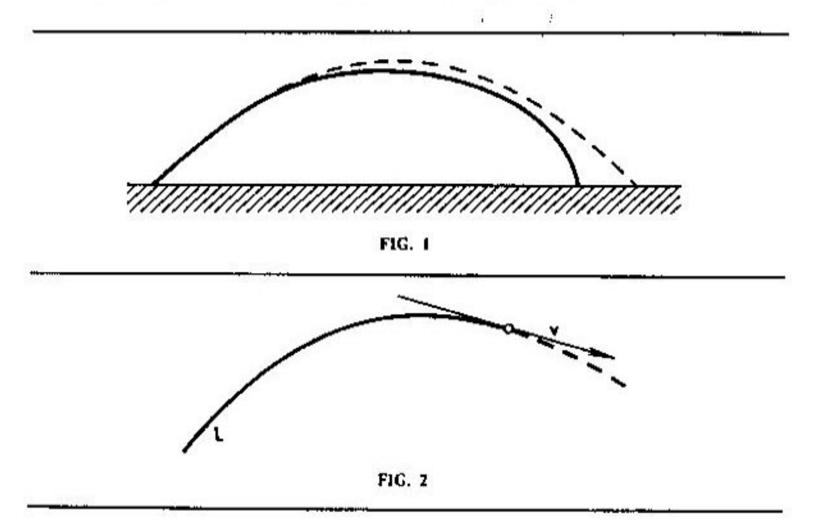


FIG. 1

FIG. 2

velocidad y, por consiguiente, en las aceptaciones que hicimos, la componente horizontal de la velocidad permanece constante durante todo el movimiento. Con otras palabras, la proyección del cuerpo sobre el plano horizontal se mueve de manera uniforme y rectilínea (fig. 3). Si suponemos, por ejemplo, que la parte de la superficie terrestre sobre la que se mueve el cuerpo lanzado es absolutamente plana y horizontal y que el sol se encuentra en el cenit, resultará que la sombra del cuerpo lanzado se moverá por la tierra de manera uniforme y rectilínea (aceptando el paralelismo de los rayos solares). De tal manera, el movimiento de un cuerpo lanzado tiene lugar en un plano vertical. En lo sucesivo admitiremos que este plano coincide con el plano del dibujo.

Vamos a considerar que la dirección hacia arriba de la recta vertical es positiva. Entonces la componente vertical de la velocidad

varía con la aceleración $-g$, es decir, con la retardación de g. Si designamos las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial por los signos v_0^h y v_0^v entonces las componentes de la velocidad, una vez transcurridos t segundos desde el comienzo del

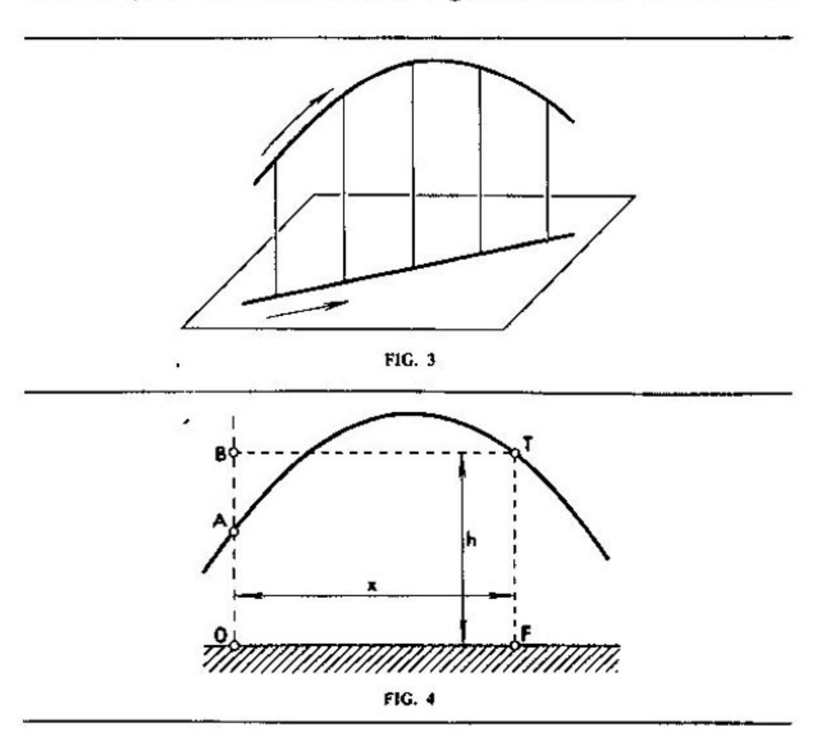


FIG. 3

FIG. 4

movimiento, respectivamente, serán iguales a

$$v^h = v_0^h, \tag{1}$$

$$v^v = v_0^v - gt. \tag{2}$$

Supongamos que en el momento inicial el cuerpo lanzado se encuentra en el punto A a la altura h_0 sobre la superficie terrestre, a la que atribuimos ser lisa y horizontal. Designemos por O la proyección del punto A sobre la superficie terrestre (fig. 4). Vamos a considerar que la componente horizontal de la velocidad inicial está orientada a la derecha: La posición que ocupa el cuerpo lanzado transcurridos t segundos desde el comienzo del

movimiento la designaremos por T, y las proyecciones del punto T sobre las rectas vertical y horizontal que pasan por O las designaremos, respectivamente, por las letras B y F. Y, por último, introduciremos las designaciones $OB = h$, $OF = x$. Entonces, es obvio, que

$$x = v_0^h t, \tag{3}$$

ya que el punto F se mueve de manera uniforme y rectilínea a la velocidad de v_0^h. Es más, $AB = h - h_0$ es el espacio recorrido por el punto B, que se desplaza en movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial v_0^v y aceleración $-g$, así que obtenemos

$$h - h_0 = v_0^v t - \frac{gt^2}{2},$$

o

$$h = h_0 + v_0^v t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

Las fórmulas (1), (2) determinan la velocidad, y las fórmulas (3), (4) determinan la posición del cuerpo lanzado una vez transcurridos t segundos desde el comienzo del movimiento.

2. PARÁBOLA

En las fórmulas (1)–(4) se sobreentiende que t adquiere solamente valores positivos, puesto que examinamos el movimiento del cuerpo después del momento $t = 0$, cuando fue lanzado con cierta velocidad inicial. No obstante, estas fórmulas también tienen sentido para los valores negativos de t. Supongamos, por ejemplo, que el cuerpo comenzó a moverse antes del momento de tiempo $t = 0$ que nos interesa y que en el momento $t = 0$ determinamos la posición del cuerpo y su velocidad, habiendo convenido considerar que estas últimas son las "iniciales". Entonces el movimiento del cuerpo hasta el momento $t = 0$ también se describe mediante las fórmulas (1)–(4) si atribuimos a t en ellas valores negativos. En la fig. 5 este movimiento se muestra con punteado. De esta manera, atribuyendo a t no solo valores positivos, sino que también negativos, obtenemos toda la trayectoria del movimiento del cuerpo tanto hacia la derecha como hacia la izquierda de cierto punto "inicial" A.

La curva obtenida se apoya con sus extremos en la recta horizontal *OD*, el cuerpo cae a la tierra y el movimiento se interrumpe. Supongamos, sin embargo, que en el punto *D* sobre el que el cuerpo cae a la tierra se ha cavado un hoyo (fig. 5). Entonces el cuerpo seguirá cayendo todavía durante cierto tiempo, y las fórmulas (1)—(4) permanecerán siendo válidas. Con esto, puesto que el cuerpo se encontrará por debajo de la recta *OD*, *h* adquirirá valores negativos. De tal guisa, la trayectoria del movimiento del cuerpo prosigue naturalmente hacia abajo de la recta *OD*

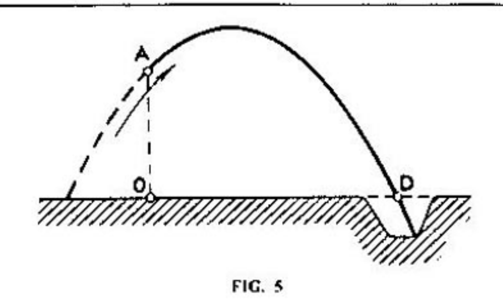


FIG. 5

y se describe con las mismas fórmulas (1)—(4). Atribuyendo a *t* valores cada vez mayores podemos prolongar la trayectoria hasta donde deseemos. De manera análoga, atribuyendo a *t* en las fórmulas (1)—(4) valores negativos y absolutamente cada vez mayores, proseguimos también la "rama" izquierda de la curva hasta donde deseemos. La curva que obtenemos (fig. 6), que con sus ramificaciones se extiende ilimitadamente a lo lejos de *A*, se llama *parábola*. Las fórmulas (1)—(4) describen el movimiento del cuerpo por esta curva bajo la acción constante, en magnitud y dirección, de la aceleración *).

*) La parte del espacio en la que sobre cada unidad de la masa actúa una fuerza de gravedad constante en magnitud y valor se denomina *campo homogéneo gravitacional*. Con cierta aproximación se puede considerar que un sector no muy grande del espacio sobre la superficie terrestre es un campo gravitacional homogéneo. El movimiento del cuerpo tiene lugar por una curva que se aproxima a un arco pequeño de la parábola y se interrumpe al caer el cuerpo a la tierra. El estudio de toda la parábola, es decir, de ambas ramas de la curva, que se extienden ilimitadamente lejos, en el problema dado tiene solamente sentido matemático.

Sobre la base de las fórmulas (1)—(4) estudiaremos algunas peculiaridades del movimiento parabólico del cuerpo que acabamos de examinar. De (2) es obvio que en el momento de tiempo $t = \frac{v_0^v}{g}$ la componente vertical de la velocidad v^v es nula. Hasta este momento de tiempo la componente v^v era positiva, es decir, el cuerpo ascendía; después de este momento es negativa y el cuerpo desciende. Con otras palabras, en el momento de tiempo

$$t = \frac{v_0^v}{g} \tag{5}$$

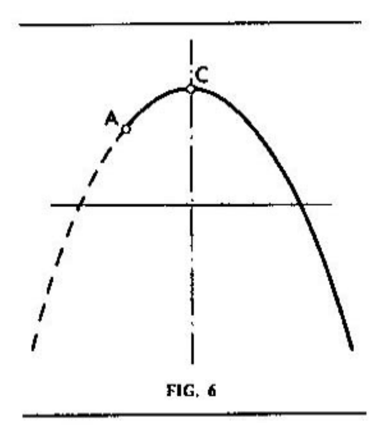


FIG. 6

El cuerpo tiene una altura máxima de ascención igual a

$$h_{\text{máx}} = h_0 + \frac{(v_0^v)^2}{2g} \tag{6}$$

(vean (4)). Esto también es fácil de comprobar mediante el cálculo directo:

$$\left[h_0 + \frac{(v_0^v)^2}{2g}\right] - h = \left[h_0 + \frac{(v_0^v)^2}{2g}\right] - \left(h_0 + v_0^v t - \frac{gt^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{(v_0^v)^2}{2g} - v_0^v t + \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2g}(v_0^v - gt)^2 \geqslant 0,$$

es decir, $h \leqslant h_0 + \frac{(v_0^v)^2}{2g}$ para cualquier t. Designemos este punto más elevado de la parábola por C. La velocidad de movimiento

del cuerpo en el punto C es horizontal. Con otras palabras, la parte de la parábola situada a la derecha del punto C puede obtenerse lanzando el cuerpo horizontalmente hacia la derecha a la velocidad correspondiente. La parte izquierda de la parábola se obtendrá al lanzar horizontalmente el cuerpo hacia la izquierda con la misma velocidad. De aquí se deduce que la recta vertical que pasa por el punto C es el *eje de simetría* de la parábola. En el punto C la parábola corta su eje de simetría; este punto se llama *vértice* de la parábola.

3. PARÁBOLA DE SEGURIDAD

Examinemos ahora la cuestión respecto a las trayectorias de los proyectiles lanzados por un cañón instalado en cierto punto O de la superficie terrestre. Vamos a pensar que la velocidad v_0 con la que sale el proyectil del cañón no depende del ángulo φ, formado por la inclinación del cañón respecto a la línea del horizonte. De tal manera, debemos estudiar la trayectoria del vuelo de un proyectil lanzado desde el punto O a la velocidad v_0 bajo el ángulo φ respecto al horizonte (fig. 7).

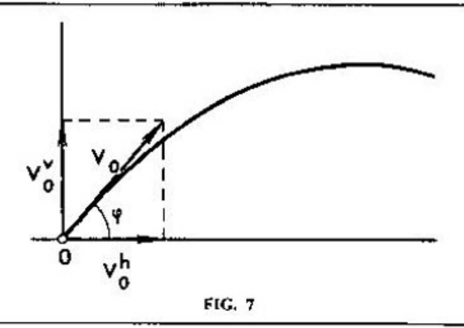


FIG. 7

En el momento de tiempo $t = \frac{v_0^v}{g}$ el proyectil alcanza el vértice de su trayectoria que, de acuerdo a (6), se encuentra a la altura

$$h_{máx} = \frac{(v_0^v)^2}{2g}.$$

Puesto que el cañón está instalado en la tierra consideramos que $h_0 = 0$, desatendiendo al mismo tiempo de la altura del propio

cañón. De la fig. 7 se ve claro que $v_0^v \leqslant v_0$ y que la igualdad $v_0^v = v_0$ se logra solamente cuando $\varphi = 90°$. De esa manera, la altura máxima de ascensión del proyectil se alcanza cuando el disparo es absolutamente vertical; ésta es igual a

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{7}$$

Nos ocuparemos del cálculo de la distancia del vuelo del proyectil. Es evidente que la altura del proyectil sobre la tierra es nula solamente en dos puntos: en el punto del disparo y en el punto de explosión, al caer a la tierra. De (4) es obvio que la altura es nula para los valores de t que son raíces de la ecuación (recordemos que $h_0 = 0$)

$$v_0^v t - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

es decir, cuando $t = 0$ ó $t = \frac{2v_0^v}{g}$. La primera raíz corresponde al momento del lanzamiento del proyectil y la segunda raíz, al momento de caída. La distancia entre el lugar del disparo y el lugar de explosión, de acuerdo a (3), es igual a:

$$x_{\text{máx}} = v_0^h t = \frac{2v_0^h v_0^v}{g}. \tag{8}$$

Al escribir esta expresión en forma de

$$x_{\text{máx}} = \frac{2v_0^h v_0^v}{g} = \frac{[(v_0^v)^2 + (v_0^h)^2 - (v_0^v - v_0^h)^2]}{g} = \frac{v_0^2 - (v_0^v - v_0^h)^2}{g},$$

encontraremos que la *distancia máxima de vuelo* se obtiene cuando $v_0^v = v_0^h$, es decir, cuando $\varphi = 45°$; dicha distancia es igual a

$$X = \frac{v_0^2}{g}, \tag{9}$$

dos veces mayor que la altura máxima de ascensión.

De manera análoga se puede demostrar que cuando los ángulos α son obtusos (es decir, en aquel caso cuando $v_0^h < 0$ y, por consiguiente, la trayectoria del vuelo del proyectil se dispone a la izquierda del punto O) la distancia máxima de vuelo del proyectil se alcanza cuando $\alpha = 135°$. Por otra parte, esto también es evidente por razones de simetría (fig. 8).

Es interesante señalar que al desviar el cañón de la pieza en un mismo ángulo desde 45° hacia arriba y hacia abajo, la distancia del vuelo del proyectil resulta ser la misma (fig. 9, *a*). En efecto (fig. 9, *b*)

$$v_0^h\big|_{\text{para el ángulo } 45^\circ+\gamma} = v_0^v\big|_{\text{para el ángulo } 45^\circ-\gamma};$$

$$v_0^v\big|_{\text{para el ángulo } 45^\circ+\gamma} = v_0^h\big|_{\text{para el ángulo } 45^\circ-\gamma}.$$

Por eso el producto $v_0^h v_0^v$ para los ángulos $45^\circ+\gamma$ y $45^\circ-\gamma$ es igual y, de esta manera (vean (8)), la distancia del vuelo del proyectil también es idéntica.

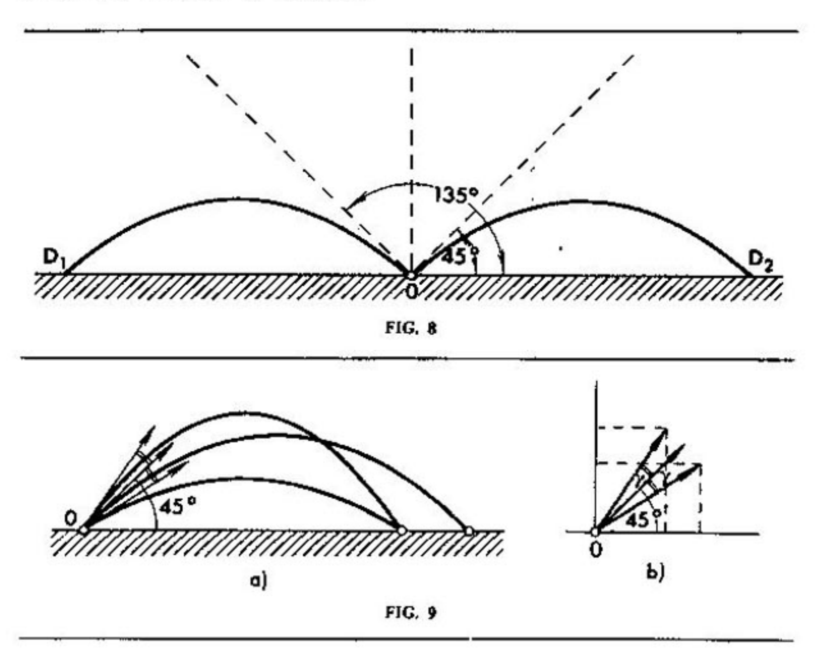


FIG. 8

FIG. 9

Analizemos ahora la cuestión respecto a la *zona de tiro*, es decir, resolveremos el problema concerniente a cuál es la parte del espacio que ocupan las trayectorias del movimiento de los proyectiles para diferentes ángulos φ. La zona de tiro (en la suposición de que todas las trayectorias están situadas en un mismo plano) está limitada por la curva cupuliforme, que pasa a través del punto *C* de elevación máxima, y los puntos D_1, D_2 de las explosiones más lejanas (fig. 10). Esta curva, como veremos ahora, también es una parábola.

Ante todo tracemos una parábola a través de los puntos C, D_1 y D_2, es decir, pongamos en claro *a qué velocidad inicial horizontal es menester lanzar el proyectil desde el punto C, que se encuentra a la altura* $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ (vean (7)), *para que su trayectoria pase a través del punto* D_2, *situado a la distancia* $\frac{v_0^2}{g}$ respecto al punto O, (vean (9)). Designemos esta velocidad incógnita por u.

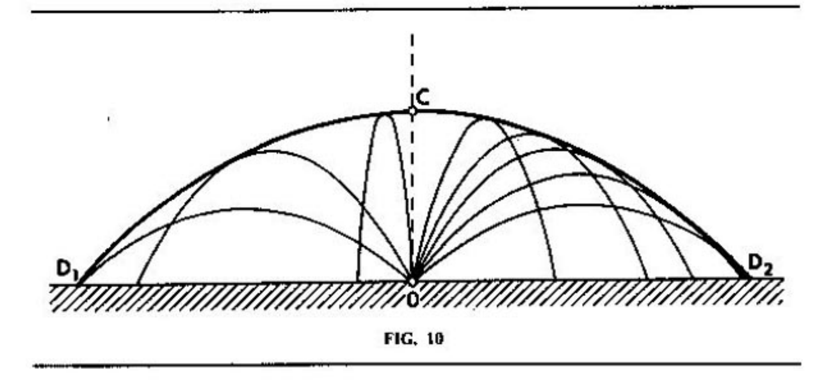


FIG. 10

Entonces, de acuerdo a la fórmula (4), en la que se debe poner $v_0^v = 0$ y $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, obtendremos que transcurridos t segundos después del disparo la altura del proyectil sobre la tierra será igual a $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}$. El momento de caída a la tierra se calculará por la ecuación $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} = 0$, de donde $t = \frac{v_0}{g}$ (se renuncia de la raíz negativa). De la fórmula (3), en la que se debe suponer $v_0^h = u$, deducimos que el punto de caída se encontrará a la distancia $ut = u\frac{v_0}{g}$ respecto al punto O. Para que este punto coincida con D_2 es menester que $u\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{g}$, es decir, $u = v_0$. Así pues, el proyectil lanzado desde el punto C horizontalmente con velocidad v_0 tiene una trayectoria que pasa a través de D_2. Esta trayectoria, prolongada no solo hacia la derecha sino que también hacia la

izquierda del punto C, se denomina *parábola de seguridad* ya que, como veremos pronto, limita la zona de tiro, y por encima de ella el vuelo está fuera de peligro. Para mayor comodidad escribiremos las fórmulas por las que se determina en el momento de tiempo t, la posición y velocidad de un proyectil imaginario que se mueve por la parábola de seguridad. Estas se obtienen de (1)—(4) al suponer en ellas $v_0^v = 0$, $v_0^h = v_0$, $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$:

$$v^h = v_0, \tag{10}$$

$$v^v = -gt \tag{11}$$

$$x = v_0 t \tag{12}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}. \tag{13}$$

Transcurridos t segundos después del disparo el proyectil lanzado por el cañón O, se encontrará en un punto T, cuya proyección F se encuentra a la distancia $x = v_0^h t$ (vean (3)) del punto O. Determinemos la posición T del proyectil imaginario en la que éste se encuentre en la misma recta vertical que el punto T (fig. 11). En semejante situación el proyectil auxiliar se encontrará transcurrido un tiempo t' después del disparo desde el punto C cuando tenemos que $v_0 t' = OF = v_0^h t$ (vean (3), (12)), es decir, transcurridos $t' = t\,\frac{v_0^h}{v_0}$ segundos. Los proyectiles imaginario y real en este momento de tiempo se encontrarán a las alturas

$$FT' = h_0 - \frac{g\,(t')^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(t\,\frac{v_0^h}{v_0}\right)^2,$$

$$FT = v_0^v t - \frac{gt^2}{2}.$$

La diferencia de estas alturas no es negativa

$$FT' - FT = \frac{v_0^2}{2g} - v_0^v t + \frac{gt^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v_0^h}{v_0}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} - v_0^v t + \frac{gt^2}{2}\left(\frac{v_0^v}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(v_0 - gt\,\frac{v_0^v}{v_0}\right)^2 \geqslant 0.$$

De tal guisa el punto T siempre está situado por debajo del punto

T', a excepción del momento de tiempo $t = \frac{v_0^2}{g v_0^v}$, cuando $FT' - FT = 0$, es decir, los puntos T y T' coinciden. De esta forma, *la trayectoria del movimiento del proyectil está situada debajo de la parábola de seguridad y es tangente a esta última en un punto.* El proyectil lanzado del cañón O bajo el ángulo φ respecto al horizonte alcanza la parábola de seguridad transcurridos $t = \frac{v_0^2}{g v_0^v}$ segundos; la proyección F del proyectil sobre la tierra en

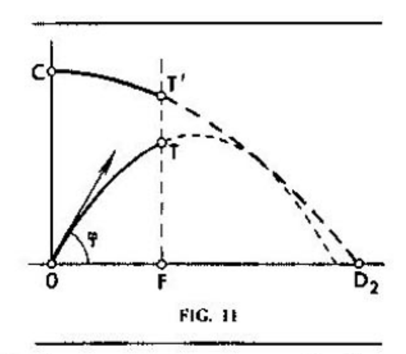


FIG. 11

este momento de tiempo se encuentra a la distancia

$$x = v_0^h t = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{v_0^h}{v_0^v} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{ctg} \varphi$$

del punto O. Al variar φ desde 90° hasta 45° esta expresión adquiere todos los valores entre 0 y $\frac{v_0^2}{g}$ (la cotangente varía desde 0 hasta 1), así que la parábola de seguridad en cualquiera de sus puntos es tangente a la trayectoria de cierto proyectil lanzado desde O. Con otras palabras, *disparando desde O bajo diferentes ángulos se puede derribar al avión que se encuentre en cualquier punto de la parábola de seguridad o debajo de ésta, pero ni un solo proyectil llega a subir por encima de la parábola de seguridad*, es decir, esta parábola limita en realidad la zona de fuego.

Recurramos de nuevo a la fig. 10. Tenemos una cantidad infinita de diversas curvas (parábolas) que son trayectorias del vuelo de los proyectiles. Además de esto, en la figura vemos una curva más, la parábola de seguridad, que limita la zona llena de trayectorias de los proyectiles siendo tangente a cada una

de éstas. Ese hecho se expresa con las siguientes palabras: *la parábola de seguridad es la envolvente de las trayectorias del vuelo de los proyectiles* *).

4. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA

Examinemos algunas propiedades de la parábola de seguridad **).

La distancia entre el punto O y el punto T, en el que el proyectil que se mueve por la parábola de seguridad se encontrará transcurridos t segundos después del disparo desde C, es igual a (vean (12), (13)):

$$OT = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2}\right)^2} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h.$$

Tracemos la recta horizontal d, que se encuentra de la superficie

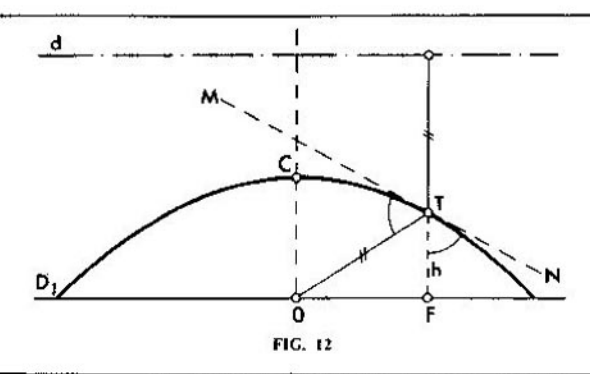


FIG. 12

de la tierra a la distancia $\frac{v_0^2}{g}$. Entonces $\frac{v_0^2}{g} - h$ *es la distancia* entre el punto T y la recta (fig. 12). Obtenemos una propiedad geométrica importante de la parábola que, generalmente, se admite como

*) El lector ahora ya puede pasar a la lectura del capítulo II.

**) Se puede demostrar que cualquiera otra parábola también será poseedora de propiedades análogas.

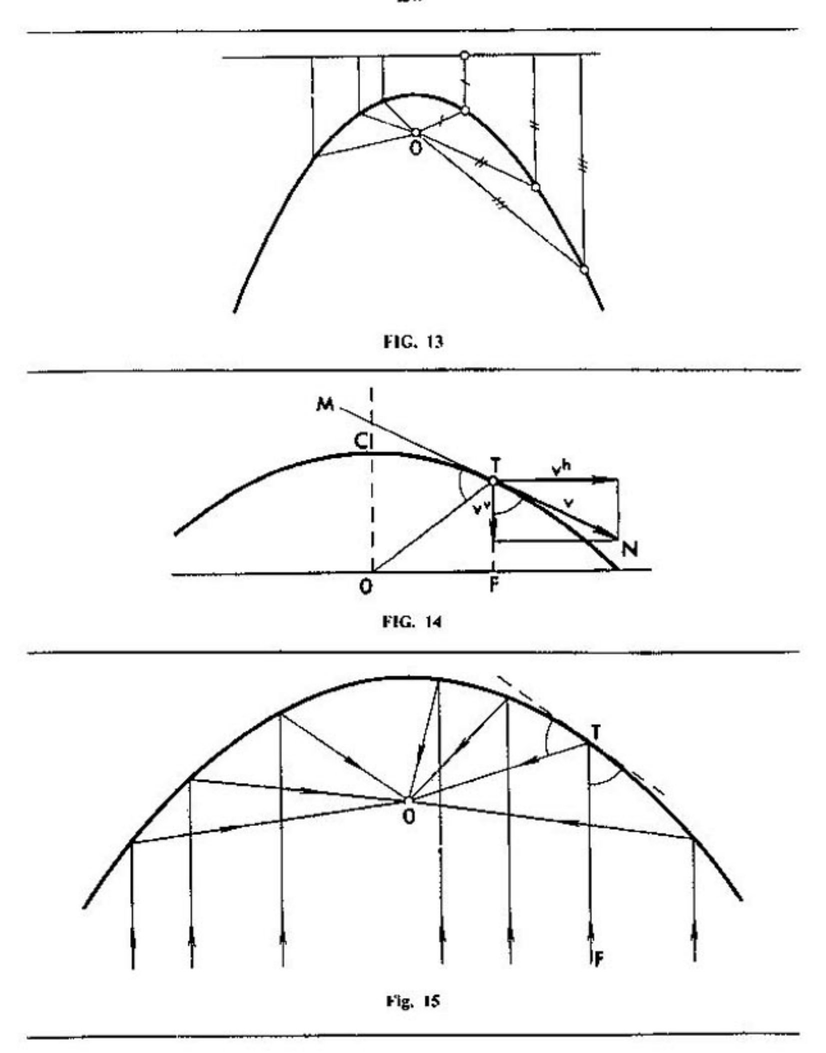


FIG. 13

FIG. 14

Fig. 15

definición de esta curva: *la parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado O y de una recta dada d* (fig. 13). El punto *O* se denomina *foco* de la parábola y la recta *d*, *directriz.*

Para concluir deduciremos una propiedad más de la parábola: *si MN es la tangente a la parábola en el punto T y F es la*

proyección del punto T sobre una recta horizontal, tendrá lugar la *igualdad* $\angle FTN = \angle OTM$ (fig. 12). Es suficiente demostrar la igualdad de las tangentes de estos ángulos. Puesto que la tangente MN coincide con la dirección de la velocidad v en el punto T

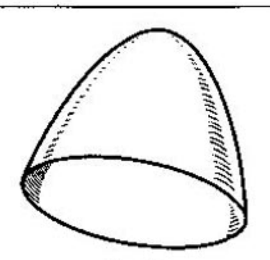


Fig. 16

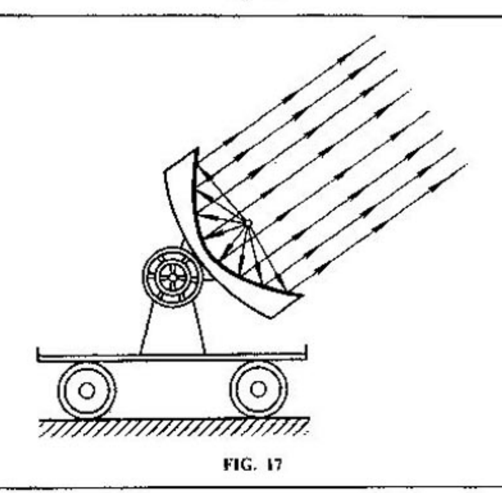


FIG. 17

(fig. 14), tendremos entonces (vean (10)–(13))

$$\operatorname{tg} \angle FTN = \frac{v^h}{-v^v} = \frac{v_0}{gt}; \quad \operatorname{tg} \angle OTF = \frac{x}{h} = \frac{v_0 t}{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}}. \qquad (14)$$

Después,

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle OTN) = -\operatorname{tg} \angle OTN =$$

$$= -\operatorname{tg}(\angle FTN + \angle OTF) = -\frac{\operatorname{tg} \angle FTN + \operatorname{tg} \angle OTF}{1 - \operatorname{tg} \angle FTN \operatorname{tg} \angle OTF}$$

ó, después de la sustitución de los valores (14) y de la simplificación,

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \frac{v_0}{gt}. \qquad (15)$$

De tal manera, $\operatorname{tg} \angle OTM = \operatorname{tg} \angle FTN$, que es lo que se quería demostrar.

La propiedad demostrada significa que si desde el punto F hacia arriba se dirige un rayo de luz, y si la parábola es un espejo liso, resulta ser que el rayo de luz, al reflejarse en el punto T de acuerdo a la ley "el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión", irá por el segmento OT y pasará a través del punto O. Puesto que ello es justo para cualquier punto T resulta ser que *el haz de rayos paralelos de luz dirigidos verticalmente hacia arriba, al reflejarse en la parábola, se recolectará en su foco O* (fig. 15). Girando a la parábola alrededor de su eje de simetría obtendremos una superficie, denominada paraboloide de revolución (fig. 16), que posee esta misma propiedad, es decir, obtendremos el reflector parabólico. Inversamente, al colocar la fuente de luz en el foco de la parábola o del reflector veremos que los rayos de luz, una vez reflejados, seguirán en haz paralelo. La estructura del proyector (fig. 17) se basa en esta propiedad de la superficie parabólica.

CAPÍTULO II

LA HIPÉRBOLA COMO LÍMITE DE LA ZONA DE AUDIBILIDAD

1. VUELO SUPERSÓNICO DEL AVIÓN

Un avión vuela en una altura h sobre la superficie terrestre a la velocidad supersónica v. ¿Cuál es en el momento dado la región de la superficie terrestre en cuyos puntos ya se ha oído o se oye ahora el sonido del motor del avión? Precisamente queremos utilizar este problema (cálculo de la zona de audibilidad) para la construcción del segundo ejemplo de envolvente. Vamos a presuponer que la superficie terrestre sobre la que vuela el avión es absolutamente plana y llana, y que la altura del avión h y su velocidad v son constantes.

Sin duda que para semejante planteamiento del problema tiene sentido examinar solamente un tramo reducido de la superficie terrestre, que puede considerarse aproximadamente plano, y un espacio pequeño de tiempo en el transcurso del cual el avión vuela sobre este trozo de superficie terrestre. Pero para el estudio matemático del problema vamos a presuponer que la superficie sobre la que vuela el avión es un plano *ilimitado* y que el avión ya vuela sobre este plano durante tiempo ilimitado. Los hechos que obtengamos de este modo tendrán sentido real solamente en un pedazo *limitado* del plano, que puede considerarse coincidente con una parte de la superficie terrestre. No obstante, convencionalmente, vamos a llamar "superficie terrestre" a todo el plano illimitado.

Cada momento de tiempo el avión en vuelo se encuentra sobre cierto punto determinado de la superficie terrestre. Este punto (la proyección del avión sobre la superficie terrestre) se mueve uniformemente a la velocidad v, describiendo una línea recta l paralela a aquella por la que vuela el avión en el espacio (fig. 18); (vamos a representar que el movimiento del avión tiene lugar de derecha a izquierda).

Admitamos que en aquel momento de tiempo cuando nos interesamos por la zona de audibilidad el avión se encuentra sobre el punto O de la recta l. Es obvio que hace t segundos el avión se encontraba sobre el punto A de la recta l, que se encuentra

a la derecha del punto O a la distancia $OA = vt$. El punto del espacio en el que en este mismo momento se encontraba el avión lo designaremos por B; este punto se halla a la altura h sobre el punto A de la superficie terrestre. Al pasar por el punto B el avión produjo un ruido que comenzó a propagarse desde este punto B en todas las direcciones. Designaremos por u la velocidad

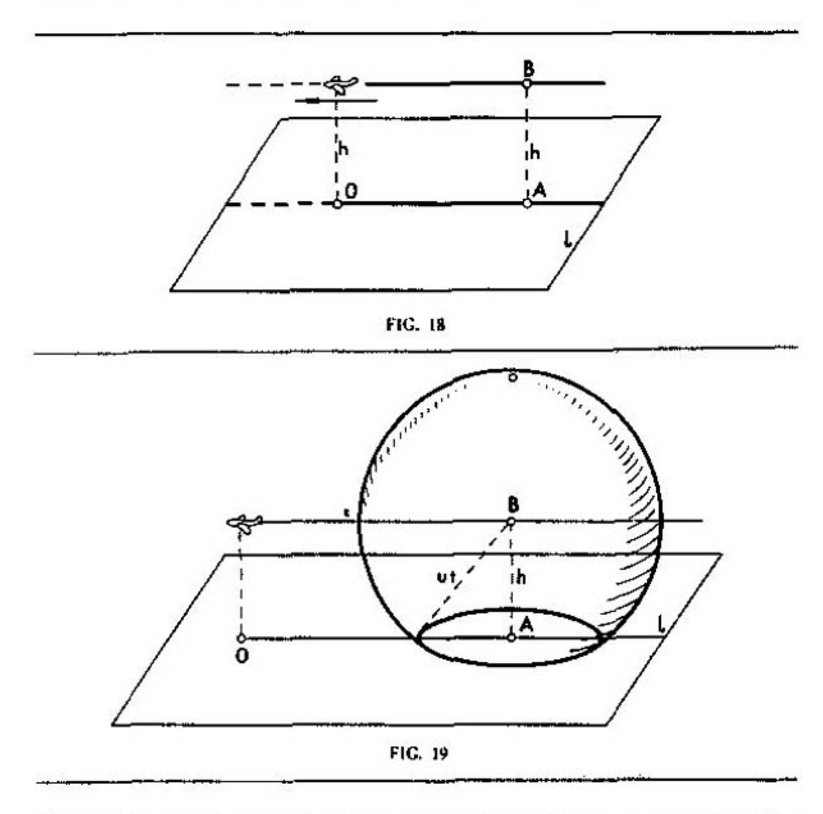


FIG. 18

FIG. 19

del sonido en el aire. Entonces, para el momento en que el avión sobrevuela el punto O, es decir, transcurridos t segundos desde que el avión se encontraba en el punto B, el sonido tiene tiempo para propagarse desde este punto en todas las direcciones a la distancia ut. Con otras palabras, en este lapso de tiempo el sonido logra desde el punto B propagarse en *una esfera* de radio ut cuyo centro es B. Si el radio de esta esfera es mayor que h, el sonido tiene también tiempo para llegar hasta la tierra y, además, la

región en la tierra hasta la que llega el sonido desde el punto B será un *círculo* que se obtiene en la intersección de la esfera que examinamos con la superficie terrestre. De la fig. 19 se ve que el radio de este círculo es igual a $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$, y que su centro se encuentra en el punto A.

Para que cierto punto M en el plano pertenezca a la zona de audibilidad es indispensable y suficiente que se encuentre una posición B del avión el ruido del cual tiene tiempo de alcanzar el punto M, es decir, que el punto M pertenezca al círculo mencionado anteriormente. Con otras palabras, cogiendo círculos semejantes para todas las posiciones posibles del avión obtendremos precisamente toda la zona de audibilidad.

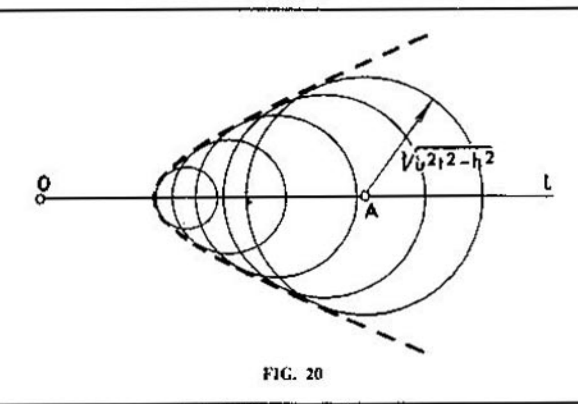


FIG. 20

De esta forma llegamos al problema matemático siguiente. Sea l cierta semirrecta que parte del punto O y u, v, h (al mismo tiempo $u < v$), tres números positivos. Supongamos que A es un punto arbitrario de la semirrecta l, y que t es un tal número positivo que la longitud del segmento OA es igual a vt. Designemos por K_A el círculo con centro en el punto A y radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. Hallar en el plano la región llena por *todos los* círculos K_A que se obtienen para todas las posiciones posibles del punto A en la semirrecta l. En la fig. 20 se exponen varios círculos semejantes y una línea de puntos que limita la región rellena por estos círculos, es decir, la línea que es el *límite* de la zona de audibilidad. Al examinar esta figura podemos hacer la conclusión de que el límite de la zona de audibilidad es la *envolvente* para los círculos que estudiamos.

2. ANGULO CARACTERÍSTICO

Examinemos primeramente el caso cuando $h = 0$, es decir, cuando el movimiento tiene lugar por la superficie terrestre: en lugar del avión el "automóvil supersónico". En este caso el radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ del círculo K_A se hace igual a ut, y nos llegamos al problema siguiente. Desde el punto A, que yace en la semirrecta l

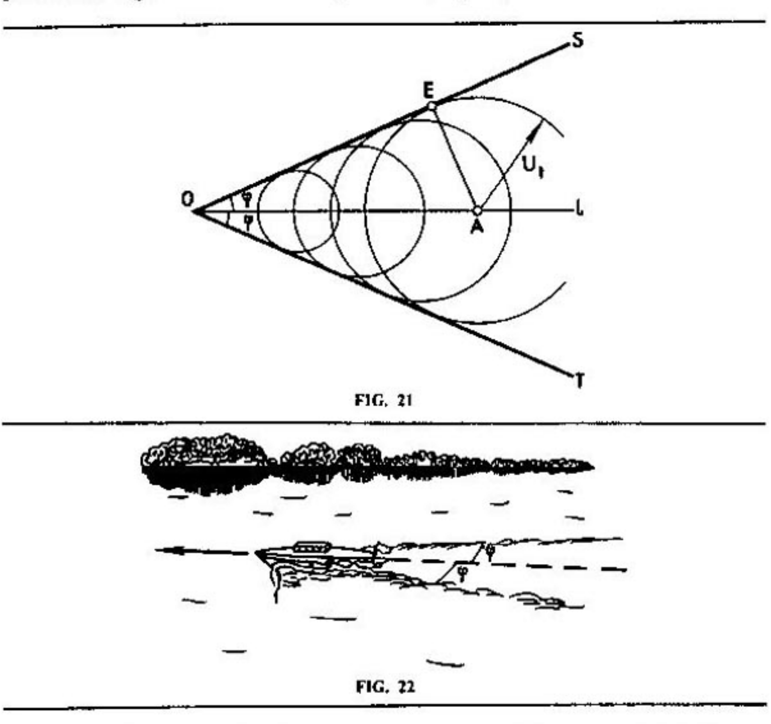


FIG. 21

FIG. 22

y se encuentra respecto al punto O a la distancia vt, como desde el centro, se describe el círculo K_A con radio ut (a su vez $u < v$). Hallar en el plano la región que se llena por todos los círculos K_A.

La solución de este problema es muy sencilla. Como es fácil ver todos los círculos K_A tienen un centro de similitud O común (ya que al variar t la distancia $OA = vt$ y el radio del círculo K_A, que es igual a ut, varían un mismo número de veces). Por esto, la región del plano que se llena por los círculos K_A, es decir, la zona de audibilidad, en el caso que examinamos representa

en sí el *ángulo* SOT con el vértice en el punto O, que está formado por las tangentes comunes de todos los círculos K_A (fig. 21). Podemos decir que los lados del ángulo SOT sirven de *envolvente* para las circunferencias que examinamos.

La semirrecta l, como es obvio, es la bisectriz del ángulo SOT. La mitad del ángulo SOT, es decir, el ángulo φ entre la semirrecta l y una de las semirrectas OS, OT, se denomina *ángulo característico*

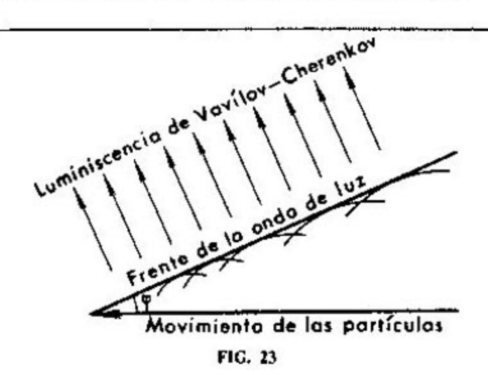


FIG. 23

o *ángulo de Mach* para el "automóvil supersónico" que examinamos*). Puesto que en el triángulo OAE, que se expone en la

*) Naturalmente, respecto al automóvil supersónico se trató solamente para la evidencia: por ahora todavía no existen automóviles semejantes. Sin embargo, la noción de ángulo característico que examinamos más arriba tiene sentido real y se utiliza ampliamente en la dinámica de los gases. Solamente que allí examinan no el movimiento del automóvil supersónico en el aire inmóvil, sino el movimiento estacionario del flujo supersónico de aire en el que se encuentra el objeto inmóvil. Al moverse el barco en el agua tranquila (fig. 22) es fácil ver el ángulo característico; en este caso se trata no de la propagación del sonido en el aire, sino de la propagación de las olas en la superficie del agua (u es la velocidad de propagación de las olas y v es la velocidad del barco).

A este mismo círculo de problemas pertenece el fenómeno descubierto en el año 1934 por los físicos soviéticos S. I. Vavílov y P. A. Cherenkov. Este consiste en lo siguiente. Designemos por u la velocidad de propagación de la luz en cierto ambiente homogéneo (por ejemplo, en un líquido transparente). Si en este líquido a la velocidad $v > u$ se mueve cierta partícula cargada, surgirá la luminiscencia, y la luz se irradiará no hacia todos los lados, sino solamente en aquellas direcciones que forman un ángulo agudo absolutamente determinado (fig. 23) con la línea de movimiento de la partícula; el ángulo φ, que se señala en esta figura, se determina por las fórmulas (16). Esta luminiscencia es precisamente el efecto de Vavílov – Cherenkov.

fig. 21, tenemos que $OA = vt$, $AE = ut$ y, por lo tanto, $OE = \sqrt{(vt)^2 - (ut)^2} = t\sqrt{v^2 - u^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{AE}{OA} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AE}{OE} = \frac{ut}{t\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}}. \qquad (16)$$

Por estas fórmulas, conociendo las velocidades u y v, se puede calcular la magnitud del ángulo característico.

3. CÁLCULO DE LA ZONA DE AUDIBILIDAD

Advertiremos primeramente que si, en cierto sistema de coordenadas, el punto A tiene las coordenadas (α, β) y el punto M tiene las coordenadas (x, y), entonces (fig. 24)

$$MA^2 = AN^2 + NM^2 = PQ^2 + NM^2 =$$
$$= (OQ - OP)^2 + (QM - QN)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Esta relación, como es fácil de comprobar, también se cumplirá para cualquiera otra posición del punto M, por ejemplo, si M se encuentra más a la izquierda o más abajo que el punto A. Por esto *si el punto M pertenece al círculo cuyo centro es A y el radio es R (es decir, si $MA \leqslant R$), entonces*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant R^2, \qquad (17)$$

y si el punto M yace en la circunferencia de este círculo, entonces

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \qquad (18)$$

Volvamos ahora al problema planteado al principio respecto al cálculo de la zona de audibilidad para el avión que vuela sobre la tierra a la altura $h > 0$.

Examinemos el sistema de coordenadas cuyo origen se encuentra en el punto O, el eje de abscisas está dirigido por la línea l y el eje de ordenadas es perpendicular a ésta (fig. 25). Sea, como antes, A el punto de la semirrecta l que se encuentra respecto al punto O a la distancia $OA = vt$. Para que el punto M con las coordenadas x, y pertenezca al círculo K_A de radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ y con centro en el punto A es indispensable y suficiente

que se cumpla la desigualdad

$$(x - vt)^2 + y^2 \leqslant u^2t^2 - h^2,$$

que se obtiene de la desigualdad (17) al poner $\alpha = vt$, $\beta = 0$, $R = \sqrt{u^2t^2 - h^2}$ o, de otro modo,

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vxt + (x^2 + y^2 + h^2) \leqslant 0. \qquad (19)$$

Puesto que todos los círculos K_A posibles llenan precisamente toda la región de audibilidad, tiene lugar la afirmación siguiente: *el punto M con coordenadas x, y pertenece a la región de la*

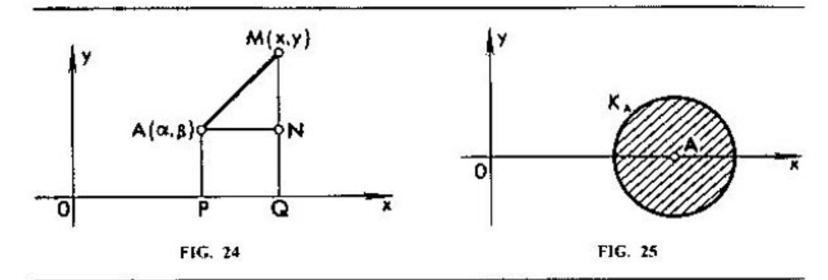


FIG. 24 FIG. 25

audibilidad entonces, y solamente entonces, cuando existe un número positivo t que satisface la desigualdad (19). Demostremos ahora el lema siguiente, que nos ayudará a comprender las condiciones (19).

Lema 1. *Examinemos el trinomio cuadrático* $at^2 + bt + c$, *en el que los coeficientes a y c son positivos. Para que exista un número positivo t que verifique la desigualdad* $at^2 + bt + c \leqslant 0$, *es indispensable y suficiente que se cumplan las condiciones siguientes:*

1) $b < 0$,

2) *el discriminante del trinomio no es negativo, es decir,*

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Demostración. Si no se cumple la condición 1), es decir si $b \geqslant 0$ para los *t positivos* todos los tres sumandos en la suma $at^2 + bt + c$ no son negativos (puesto que a y c son positivos). Por consiguiente, el trinomio $at^2 + bt + c$, para t positivos, adquiere solamente valores *positivos*. Si no se cumple la condición 2), es decir, si el número $b^2 - 4ac$ es negativo, entonces el trinomio adquiere solamente valores positivos, ya que

$$at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

De tal manera, si para cierto t positivo tiene lugar la desigualdad $at^2 + bt + c \leqslant 0$, entonces ambas condiciones 1) y 2) deben cumplirse.

Inversamente, supongamos que se cumplen las condiciones 1) y 2). Entonces, en virtud de la condición 2), las raíces del trinomio $at^2 + bt + c$ son reales y, puesto que $a > 0$ y $c > 0$, resulta ser que el producto de las raíces es positivo, es decir, ambas raíces tienen signos iguales. De la condición 1) se deduce que la suma de las raíces es positiva y que, por eso mismo, *ambas raíces son positivas*. Con otras palabras, existe cierto número positivo con el que $at^2 + bt^2 + c = 0$, que es lo que había que demostrar. El lema queda demostrado.

Este lema puede ser aplicado al trinomio que figura en la parte izquierda de la relación (19), ya que en este último los coeficientes $a = v^2 - u^2$ y $c = x^2 + y^2 + h^2$ son positivos. De tal guisa, para que exista un número positivo t que verifique la desigualdad (19) (es decir, para que el punto M pertenezca a la región de audibilidad) es indispensable y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1) $2vx > 0$ ó, de otra forma, $x > 0$;

2) el discriminante no es negativo, es decir,

$$(2vx)^2 - 4(v^2 - u^2)(x^2 + y^2 + h^2) \geqslant 0.$$

Abriendo los paréntesis en la última desigualdad y dividiendo a ésta por el número positivo $4(v^2 - u^2)h^2$ volveremos a escribir esta desigualdad en forma de

$$\frac{x^2}{\frac{v^2 - u^2}{u^2}h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1.$$

Y, por último, designando el número $\frac{v}{u}h$ por c, obtendremos

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1. \qquad (20)$$

Señalaremos que $v > u$ y que, por consiguiente, $c = \frac{v}{u}h > h$, es decir, el número $c^2 - h^2$ es positivo.

De esta forma, *la región de audibilidad se compone de todos aquellos puntos que se encuentran a la derecha del eje Oy (es decir, que satisfacen la condición $x > 0$) y para cuyas coordenadas se cumple la relación* (20).

Si las coordenadas x, y del punto M satisfacen la desigualdad

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} > 1, \qquad (21)$$

es fácil comprender que el punto M yace **en el interior** de la región de audibilidad. Efectivamente, todos los puntos que se encuentren muy próximos a M (es decir, los puntos cuyas coordenadas se diferencian poco de las coordenadas del punto M)

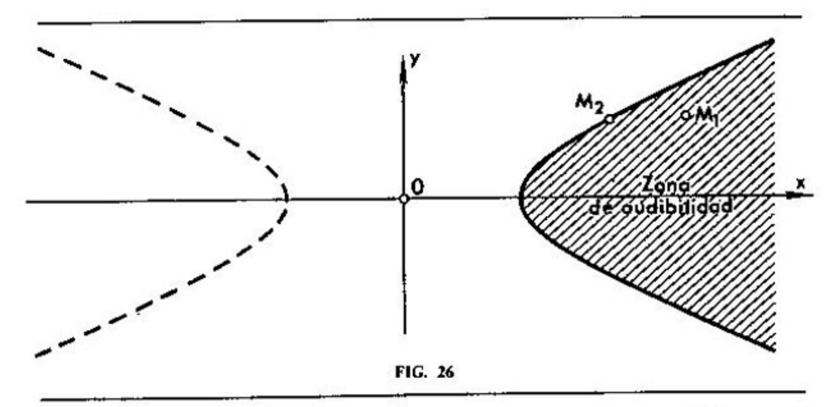


FIG. 26

también satisfacerán la desigualdad (21); con otras palabras, al punto M por todas partes le rodean puntos que pertenecen a la región de audibilidad, y ello significa que el punto M yace en el interior de dicha región (punto M_1 en la fig. 26). Si, por el contrario, las coordenadas x, y del punto M satisfacen la relación

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1, \qquad (22)$$

resulta ser que el punto M yace en el límite de la región de audibilidad (punto M_2 en la fig. 26). En efecto, es suficiente apenas variar la magnitud de la coordenada y, aumentando su magnitud absoluta, para que cese de cumplirse la condición (20), es decir, existen puntos que por muy próximos que sean a M no pertenecen a la zona de audibilidad.

De esta forma, *los puntos que yacen a la derecha del eje* Oy, *y cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad* (21), *se encuentran en el interior de la zona de audibilidad, y los puntos que satisfacen la ecuación* (22), *se encuentran en el límite de esta zona.*

Si examinamos en el plano todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad (22), y no solo aquellos para los que $x > 0$, resulta ser que obtenemos no solo el límite de la región de audibilidad sino que también una línea curva idéntica situada simétricamente a la izquierda del eje Oy (línea curva punteada en la fig. 26). Ha sido aceptado el considerar que éstas no son dos líneas distintas, sino dos partes o, como dicen frecuentemente, dos ramas de una línea que se denomina *hipérbola* *).

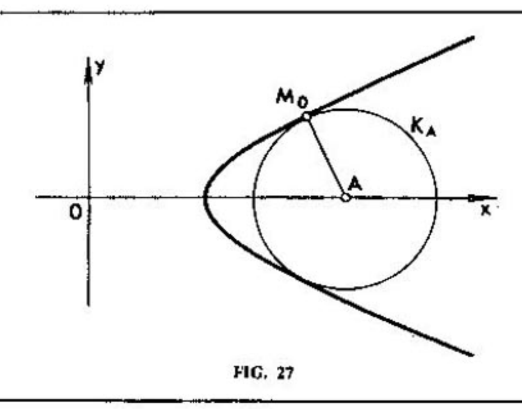


FIG. 27

De tal manera, anteriormente hemos demostrado que *el límite de la zona de audibilidad es la rama derecha de la hipérbola, que se determina por la ecuación* (22). De lo dicho se puede deducir que la rama derecha de la hipérbola (22) es la envolvente para los círculos K_A (fig. 27), es decir, que en todo punto M_0 esta rama es tangente a uno de los círculos K_A **). En lo sucesivo nos será imprescindible disponer de fórmulas que permitan hallar aquel círculo K_A que es tangente a la envolvente en el punto M_0. Deduzcamos dichas fórmulas. Supongamos que M_0 es cierto punto

*) Generalmente, la ecuación de la hipérbola se escribe en forma de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De tal guisa, los números a y b para nuestra hipérbola (22) tienen las magnitudes $a = \sqrt{c^2 - h^2}$, $b = h$.

**) Ahora ya el lector puede pasar a la lectura del capítulo II e incluso, de una vez, del capítulo IV.

que yace en el límite de la zona de audibilidad, es decir, que yace en la rama derecha de la hipérbola (22). Designemos a las coordenadas de este punto por x_0 e y_0. Estas coordenadas satisfacen la ecuación (22), ya que el punto M_0 yace en la hipérbola de donde encontramos

$$y_0^2 = h^2\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - 1\right);$$

a continuación, recordando la fórmula $c = \frac{v}{u}h$, obtenemos

$$x_0^2 + y_0^2 + h^2 = \frac{c^2 x_0^2}{c^2 - h^2} = \frac{v^2 x_0^2}{v^2 - u^2}. \quad (23)$$

Puesto que el punto M_0 pertenece a la zona de audibilidad (yace en el límite de esta zona) se registrará un circulo K_A comprendiente este punto, es decir, se registrará un número positivo t que verifique la desigualdad (vean (19)):

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vx_0t + (x_0^2 + y_0^2 + h^2) \leqslant 0,$$

ó, lo que es lo mismo (vean (23)), la desigualdad

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vx_0t + \frac{v^2 x_0^2}{v^2 - u^2} \leqslant 0.$$

Pero esta última desigualdad se puede volver a escribir en forma de

$$(v^2 - u^2)\left[t - \frac{vx_0}{v^2 - u^2}\right]^2 \leqslant 0,$$

que, como es obvio, solamente es válida *para un solo valor* de t que, precisamente, es el valor

$$t = \frac{vx_0}{v^2 - u^2},$$

que convierte en cero a la expresión comprendida en los paréntesis cuadrados. De tal guisa, existe solamente un círculo K_A que comprende el punto M_0 y que, exactamente, es el círculo con centro en el punto A, que se encuentra de O a la distancia

$$OA = vt = \frac{v^2 x_0}{v^2 - u^2} = \frac{c^2 x_0}{c^2 - h^2}. \quad (24)$$

El punto M_0 que examinamos yace en la circunferencia de este círculo K_A, ya que el punto M_0 se encuentra en el límite de la

zona de audibilidad. Así pues, la hipérbola, que limita la zona de audibilidad, pasa fuera del círculo K_A que examinamos y tiene con éste un punto común M_0, es decir, es tangente al círculo K_A en el punto M_0.

4. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA HIPÉRBOLA

Representemos ahora en un mismo dibujo a la hipérbola (22) y a las rectas OS, OT, inclinadas respecto al eje de las abscisas bajo un ángulo φ (vean (16). Haremos ver ahora que *toda la hipérbola está situada íntegramente en los ángulos verticales SOT* y *S'OT'* (fig. 28) *y que, a medida que se aleja del punto O, ésta se aproxima cada vez más a las rectas SS'* y *TT'*. Para la demostración

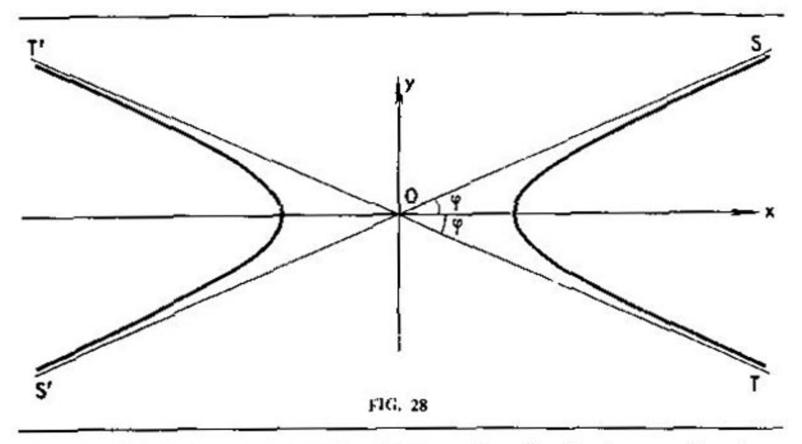


FIG. 28

nos imaginaremos que por la tierra, a la velocidad v, se desplaza un "automóvil supersónico", y que directamente sobre él (a la misma velocidad v) se desplaza un avión. Los círculos K_A, pertenecientes al "automóvil" y al avión, los designaremos por los símbolos K_A^{aut} y K_A^{av}. Examinemos los círculos K_A^{aut} y K_A^{av} con centro en un mismo punto A, que se encuentra respecto a O a la distancia $OA = vt$. Puesto que el radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ del círculo K_A^{av}, como es obvio, es menor que el radio ut del círculo K_A^{aut}, resulta ser que el círculo K_A^{av} se encuentra en el interior del círculo K_A^{aut} y, por consiguiente, toda la zona de audibilidad del avión se encuentra en el interior de la zona de audibilidad del "automóvil". De esta manera, la

rama derecha de la hipérbola (22) se encuentra en el interior del ángulo SOT (fig. 28): la rama izquierda, simétrica a la rama derecha, se encuentra en el interior del ángulo $S'OT'$. Mas

$$ut - \sqrt{u^2t^2 - h^2} = \frac{h^2}{ut + \sqrt{u^2t^2 - h^2}} < \frac{h^2}{ut}.$$

De tal manera, la diferencia entre los radios de los círculos K_A^{out}

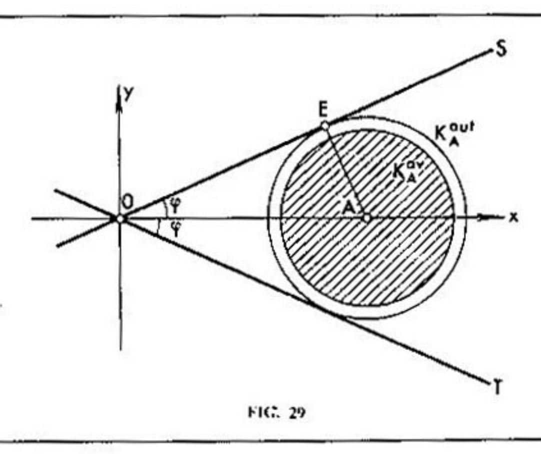


FIG. 29

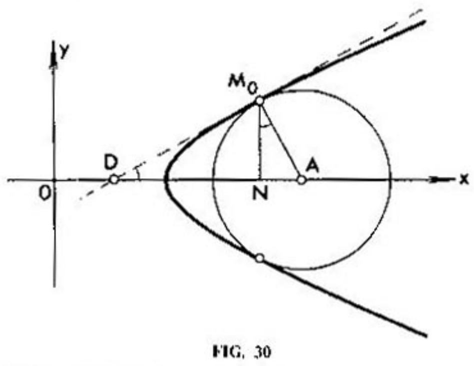


FIG. 30

y K_A^{av} se hace cada vez menor al aumentar t (es decir, al alejarse el punto A del O), y ello significa que la hipérbola se aproxima cada vez más a las rectas OS, OT (fig. 29).

Las rectas SS' y TT' se denominan *asíntotas* de la hipérbola.

Deduciremos ahora la ecuación de la línea recta *tangente*

a la hipérbola. Supongamos que M_0 es cierto punto que yace en la rama derecha de la hipérbola. Designemos por x_0 y y_0 a las coordenadas de este punto. Como vimos anteriormente, el círculo K_A con centro en el punto A, que se determina por la relación (24), es tangente a la hipérbola (22) en el punto M_0 (fig. 30).. Pero entonces la tangente al círculo K_A en el punto M_0 también es tangente a la hipérbola. Puesto que sabemos como trazar una tangente a un círculo encontraremos de la misma forma el procedimiento para construir una tangente a la hipérbola.

Escribamos la ecuación de esta tangente. Para ello designamos por D el punto de intersección de la tangente con el eje de las abscisas, y examinemos el triángulo ADM_0. Bajando una perpendicular M_0N desde el punto M_0 hasta el eje de las abscisas encontraremos que $\angle ADM_0 = \angle NM_0A$ y, por consiguiente, (vean (24))

$$\operatorname{tg} \angle ADM_0 = \operatorname{tg} \angle NM_0A = \frac{NA}{NM_0} = \frac{OA - ON}{NM_0} =$$

$$= \frac{\frac{c^2 x_0}{c^2 - h^2} - x_0}{y_0} = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}.$$

Si escribimos la ecuación de la tangente que buscamos en forma de $y = kx + b$ resulta ser que el coeficiente angular será igual a la tangente del ángulo ADM_0, formado por la tangente con el eje de las abscisas. Esta tangente es la que acabamos de calcular. De tal guisa, la ecuación de la tangente tiene el aspecto de

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}\, x + b.$$

Queda por saber el valor de la ordenada inicial b. Puesto que la tangente pasa a través del punto M_0 resulta ser que las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la tangente, es decir,

$$y_0 = \frac{h^2 x_0^2}{(c^2 - h^2)\, y_0} + b,$$

de donde

$$b = -\frac{h^2}{y_0}\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2}\right).$$

Ya que el punto M_0 yace en la hipérbola (vean (22)), la expresión entre paréntesis es igual a la unidad. De tal modo, definitivamente encontramos que

$$b = -\frac{h^2}{y_0},$$

y, por consiguiente, la ecuación de la tangente adquiere la forma

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}\, x - \frac{h^2}{y_0}.$$

Y, por último, multiplicando ambas partes por $\frac{y_0}{h^2}$, obtendremos la ecuación de la tangente en una forma fácil de recordar (comparen con la ecuación de la hipérbola (22)):

$$\frac{x_0 x}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y}{h^2} = 1. \tag{25}$$

Recordaremos que (25) es *la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto M_0 con coordenadas x_0, y_0.*

Escribamos ahora las ecuaciones de las asíntotas; ello nos permitirá establecer dos propiedades muy interesantes de la hipérbola. El coeficiente angular k de la recta $S'S$ es igual a $\operatorname{tg} \varphi$, es decir, (vean (16))

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2} - 1}} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}},$$

y la ordenada inicial b es igual a cero, ya que esta recta pasa a través del origen de las coordenadas. De esta manera, la ecuación de la asíntota $S'S$ tiene la forma de

$$y = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\, x. \tag{26}$$

La recta $T'T$ está inclinada respecto al eje de las abscisas bajo un mismo ángulo, pero sus ordenadas se diferencian por su signo de las ordenadas de los puntos en la recta $S'S$. Precisamente por esto la ecuación de la recta $T'T$ tiene el aspecto de

$$y = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\, x. \tag{27}$$

Supongamos ahora que M_0 es un punto arbitrario de la hipérbola; designemos a las coordenadas de este punto por x_0, y_0. Tracemos una tangente a la hipérbola en el punto M_0 y designemos los puntos de intersección de esta tangente con las asíntotas mediante P_1 y P_2 (fig. 31). Queremos calcular las coordenadas de los puntos P_1 y P_2. Designemos las coordenadas del punto

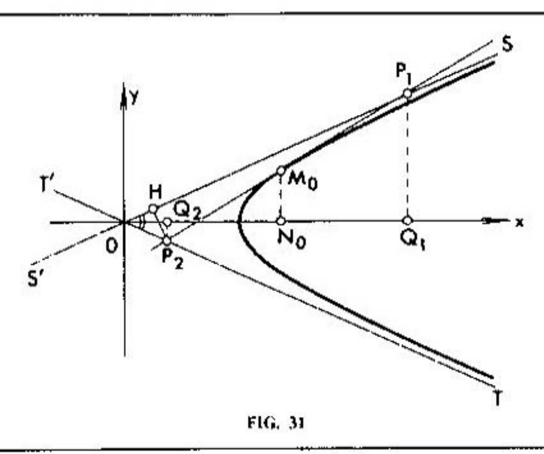


FIG. 31

P_1 por x_1, y_1. Puesto que el punto P_1 yace en la asíntota $S'S$, resulta ser que sus coordenadas verifican la ecuación (26), es decir,

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}} x_1. \tag{28}$$

Ya que, además, el punto P_1 yace en la tangente, sus coordenadas verifican la ecuación (25), es decir,

$$\frac{x_0 x_1}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y_1}{h^2} = 1. \tag{29}$$

Y, por último, puesto que el punto M_0 yace en la hipérbola, resulta ser (vean (22)) que:

$$\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2} = 1. \tag{30}$$

De las tres relaciones últimas no es difícil determinar las coordenadas del punto P_1. Exactamente, sustituyendo en la relación (29) el número y_1 por su valor (28) obtendremos

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2 - h^2}} \left(\frac{x_0}{\sqrt{c^2 - h^2}} - \frac{y_0}{h} \right) = 1.$$

Multiplicando, a continuación, ambas partes de esta relación por $\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h}$ y aprovechando la relación (30) hallamos

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2-h^2}}=\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h},$$

de donde

$$x_1=x_0+y_0\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{h}. \tag{31}$$

De manera absolutamente análoga se puede calcular la abscisa x_2 del punto P_2;

$$x_2=x_0-y_0\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{h}. \tag{32}$$

De las relaciones (31) y (32) obtenemos ahora

$$x_1-x_0=x_0-x_2, \tag{33}$$

$$x_1x_2=x_0^2-y_0^2\frac{c^2-h^2}{h^2}=(c^2-h^2)\times$$

$$\times\left(\frac{x_0^2}{c^2-h^2}-\frac{y_0^2}{h^2}\right)=c^2-h^2 \tag{34}$$

(vean (30)).

Tracemos desde los puntos P_1, M_0 y P_2 las perpendiculares P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2 sobre el eje de las abscisas. Entonces $N_0Q_1=$ $=OQ_1-ON_0=x_1-x_0$, $Q_2N_0=ON_0-OQ_2=x_0-x_2$, y de la relación (33) se deriva que $N_0Q_1=Q_2N_0$, es decir, N_0 es el centro del segmento Q_2Q_1. De aquí resulta (en virtud del paralelismo de los segmentos P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2) que el punto M_0 es el centro del segmento P_1P_2. De esta forma, *el segmento tangente a la hipérbola, comprendido entre las asíntotas, queda dividido por la mitad en el punto de contacto.*

Daremos ahora una interpretación geométrica a la relación (34). Con este fin calcularemos el área del triángulo OP_1P_2. Bajemos del punto P_2 la perpendicular P_2H sobre la recta SS'. Entonces

el área S_Δ del triángulo OP_1P_2 tiene el valor siguiente:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} OP_1 \cdot P_2H = \frac{1}{2} OP_1 \cdot (OP_2 \cdot \operatorname{sen} 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \left(\frac{OQ_1}{\cos\varphi}\right)\left(\frac{OQ_2}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot x_1x_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos^2\varphi}(c^2 - h^2),$$

(vean (34)).

De tal guisa, *cualquiera que sea la tangente que tracemos a la hipérbola corta del ángulo comprendido entre las asíntotas un triángulo que siempre tiene una misma área y que, precisamente, es*

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos^2\varphi}(c^2 - h^2).$$

(Los lectores con conocimiento de trigonometría comprenderán sin dificultad que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}$$

y, por esto, $S_\Delta = h\sqrt{c^2 - h^2}$).

CAPÍTULO III

LA ASTROIDE Y LA CICLOIDE

1. CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

En este pequeño capítulo examinaremos dos ejemplos más de envolventes en cuya calidad aparecerán aquí dos líneas interesantes: la astroide y la cicloide. Para la investigación aprovecharemos el concepto de *centro instantáneo de rotación*, que juega un papel importante en la mecánica.

Examinemos el movimiento giratorio de una figura plana invariable, por ejemplo, recortada de cartón, es decir, tal desplazamiento de la figura por el plano durante el cual cierto punto O (centro de rotación) permanece inmóvil todo el tiempo, mientras que la figura gira alrededor del punto O (fig. 32). Cualquier otro punto A de la figura en movimiento distinto del punto O, describe una circunferencia. En todo momento la velocidad v del movimiento del punto A va dirigida por la tangente a esta circunferencia, es decir, está orientada perpendicularmente al segmento OA (fig. 33).

En la mecánica se admite considerar (y esto se podría argumentar matemáticamente) que la figura, durante su desplazamiento arbitrario por el plano, efectúa en cada momento aislado de tiempo t un "movimiento instantáneo", que o bien es *un movimiento de avance rectilíneo* con cierta "velocidad instantánea", o bien es *de rotación* alrededor de cierto punto denominado "centro instantáneo de rotación". Con esto el punto O, que es el centro instantáneo de rotación, no se mueve en absoluto en el momento de tiempo que examinamos (es decir, su velocidad es nula), mientras que cualquier otro punto A de la figura en movimiento, distinto del punto O, tiene en este momento de tiempo una velocidad que no es nula y que está dirigida penpendicularmente al segmento OA. De tal modo, el centro instantáneo de rotación es *el único* punto de la figura en movimiento que en el momento dado tiene una velocidad igual a cero, es decir, es el único "punto instantáneo en reposo".

Supongamos, por ejemplo, que un círculo (u otra figura cualquiera) rueda sin resbalamiento en el plano por cierta línea L (fig. 34). La palabra "rueda" significa que el círculo se desplaza

en el plano tocando en todo momento de tiempo la línea L. Cuando decimos que el círculo rueda "sin resbalamiento" tenemos en cuenta que el punto del círculo en movimiento, con el que contacta la línea L, no resbala por la línea L, es decir, este punto tiene una velocidad igual a cero y, por consiguiente, es el

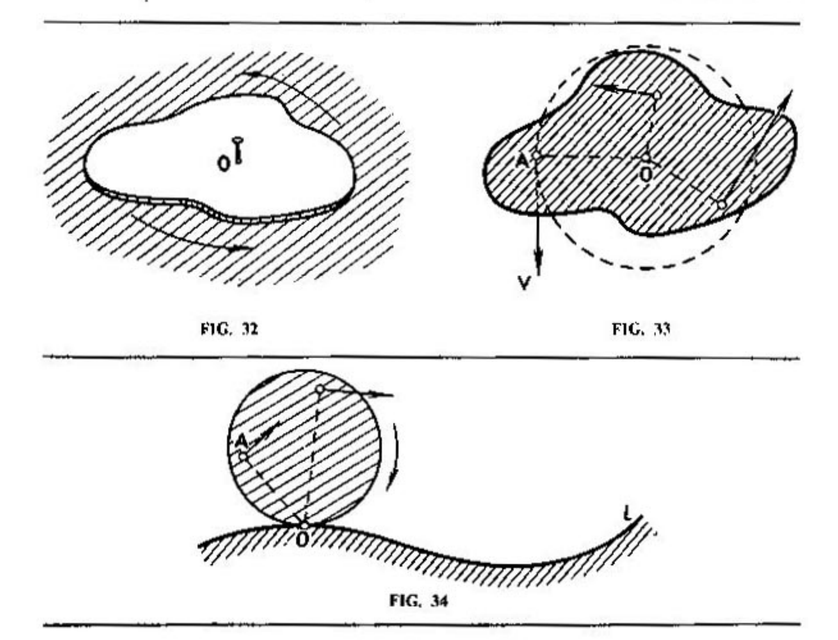


FIG. 32 FIG. 33

FIG. 34

centro instantáneo de rotación. De esta forma, *si el círculo rueda sin resbalamiento por la línea inmóvil L resulta ser que en todo momento de tiempo el punto de contacto del círculo con la línea L es el centro instantáneo de rotación; si designamos por O el punto de contacto entonces cualquier punto A del círculo que rueda, en el momento de tiempo dado, tiene una velocidad instantánea que está orientada perpendicularmente al segmento OA.*

2. LA ASTROIDE

Aceptemos en calidad de línea L a una circunferencia con radio R y pasemos a examinar el círculo con radio $^1/_4R$ que rueda sin resbalamiento por la parte interior de la circunferencia L. Señalemos en la circunferencia del círculo que rueda cierto punto A.

y observemos *la trayectoria del movimiento* del punto A, es decir, la línea que traza el punto A durante la rodadura del círculo. Si en el momento inicial, por ejemplo, el punto A se encontraba en la circunferencia L (fig. 35, posición I del circulo que rueda), resulta que a continuación el punto A se desplaza en el interior

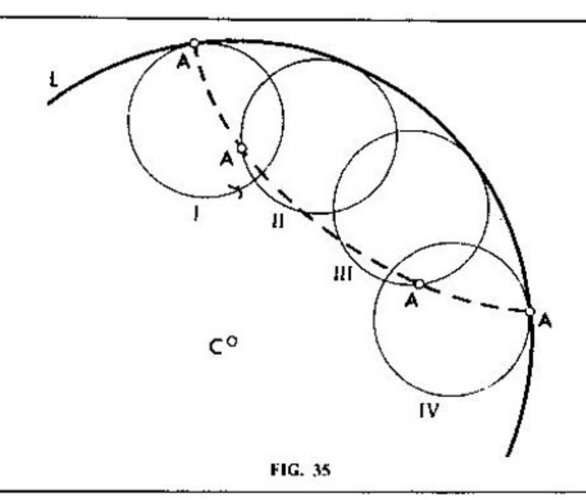


FIG. 35

de la circunferencia L (posiciones II, III) y regresa de nuevo a la circunferencia L (posición IV). Como resultado el punto A describe un arco situado en el interior de la circunferencia L y que se apoya en ésta con sus extremos (trazas en la fig. 35). Es obvio que entre los extremos de este arco se encuentra exactamente una cuarta parte de la circunferencia L, pues la longitud de ésta es cuatro veces superior que la longitud de la circunferencia del círculo que rueda. Durante la rodadura ulterior del círculo el punto A describirá un segundo arco idéntico que abarca una cuarta parte de la circunferencia, y a continuación el tercero y el cuarto. Como resultado el punto A regresa a la posición inicial, habiendo trazado una línea cerrada con cuatro puntas (vértices) inscrita en la circunferencia L (fig. 36). Esta línea se denomina *astroide*. Uniendo en cruz los vértices de la astroide obtendremos dos diámetros PM y QN de la circunferencia L que son perpendiculares entre sí y que dividen la astroide en cuatro arcos iguales.

Examinemos cierta posición del círculo que rueda y el correspondiente punto A de la astroide (fig. 37). Como antes, designemos por O el punto de contacto del círculo que rueda con la

circunferencia. Es fácil comprender que el arco *MO* de la circunferencia *L* tiene la misma longitud que el arco *AO* de la circunferencia del círculo que rueda ya que, en efecto, en la posición inicial del círculo que rueda el punto *A* coincidía con *M*

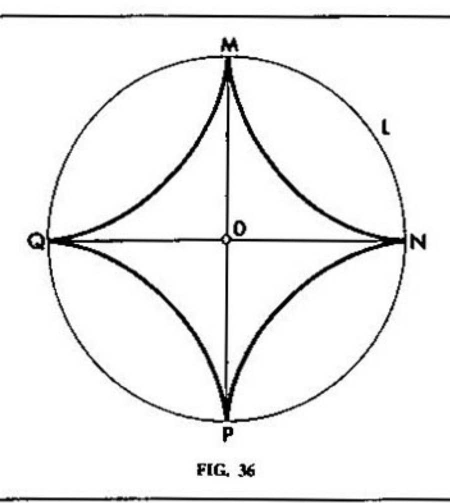


FIG. 36

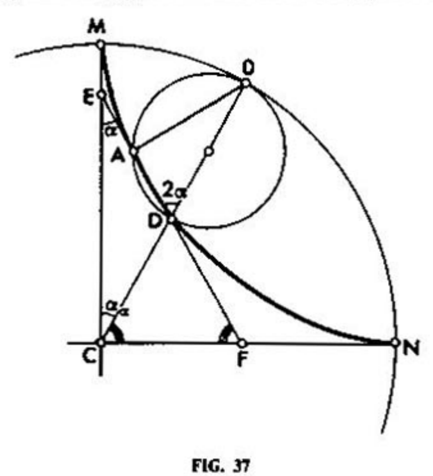


FIG. 37

y la rodadura transcurre sin resbalamiento. Tracemos desde el centro *C* de la circunferencia *L* los radios *CM*, *CO*, *CN*. Es evidente

que el radio CO pasa por el centro del círculo que rueda y que corta a la circunferencia de este círculo en el punto D, opuesto diametralmente al punto de contacto O. Puesto que el radio de círculo que rueda es igual a $^1/_4R$ resulta que $CD = DO = {}^1/_2R$. En este momento de la rodadura del círculo el centro instantáneo de rotación se encuentra en el punto O y, por consiguiente, la velocidad con que se mueve el punto A, que describe una astroide, está dirigida perpendicularmente al segmento OA. Pero

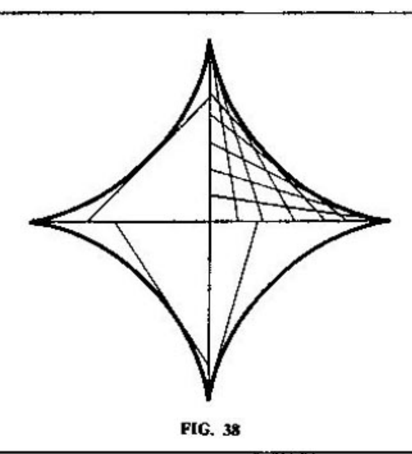


FIG. 38

la velocidad del movimiento del punto siempre está orientada por la tangente respecto a la trayectoria que describe este punto. Por lo tanto, la perpendicular al segmento OA, que pasa por el punto A, es la tangente a la astroide en el punto A. Esta perpendicular, evidentemente, pasa por el punto D (ya que el ángulo OAD se apoya en el diámetro). Así pues AD es la tangente a la astroide. Designemos por E y F los puntos de intersección de esta tangente con los radios CM y CN.

Designemos a continuación el ángulo MCO por α. Puesto que el arco MO abarca el ángulo central α resulta ser que el arco AO, de una misma longitud que el anterior, abarca en la circunferencia con radio cuatro veces menor un ángulo central igual a 4α y, por consiguiente, el ángulo inscrito ADO, que se apoya en el mismo arco AO, es igual a 2α. Ahora encontramos en el triángulo CDE: $\angle CED = \alpha$, y del triángulo CDF, encontramos: $\angle DCF = \angle DFC = 90° - \alpha$. Por lo tanto, los triángulos CDE y CDF son isósceles, es decir, $ED = CD = DF = {}^1/_2R$ y $EF = R$.

De este modo, *el segmento EF, que es tangente a la astroide y se encuentra entre las rectas CM y CN, es igual al radio R de la circunferencia L.* Como que $\angle CEF = \alpha$, y el ángulo α durante la rodadura del círculo por el arco MN varía desde 0 hasta 90°, resulta ser que mediante esta construcción se puede obtener cualquier segmento EF de longitud R cuyos extremos se encuentran en los lados del ángulo MCN. Con otras palabras, *la astroide contacta con todos los segmentos rectilíneos de longitud R los extremos de los cuales se encuentran en dos rectas MP y NQ de mutua perpendicularidad*, es decir, la astroide es *la envolvente* de todos estos segmentos (fig. 38).

En el capítulo IV (vean pág. 73) volveremos a tratar de la astroide y deduciremos su ecuación.

3. LA CICLOIDE

Ahora vamos a examinar un círculo de radio r que rueda sin resbalamiento por la línea recta L. El punto A, que yace en la circunferencia del círculo que rueda, describe durante este movimiento una línea que se denomina cicloide (fig. 39). Todo "arco" de la cicloide abarca entre sus extremos un segmento de la recta L con longitud $2\pi r$.

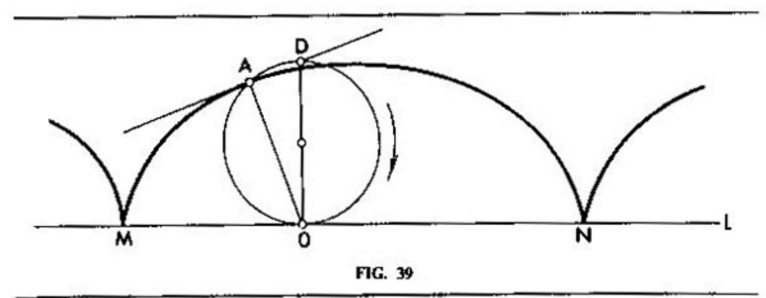


FIG. 39

Examinemos cierta posición del círculo que rueda y el correspondiente punto A de la cicloide. El punto de contacto del circulo con la recta L lo designaremos por O, y el punto diametralmente opuesto en la circunferencia lo designaremos por D. En este momento de rodadura del círculo el centro instantáneo de rotación se encuentra en el punto O y, por esto mismo, la velocidad del movimiento del punto A, que describe una cicliode, está orientada perpendicularmente respecto al segmento OA, es decir, está dirigida

por la recta AD. Ya que la velocidad del movimiento siempre tiene la dirección de la tangente respecto a la línea del movimiento del punto, resulta ser que *la recta AD es la tangente a la cicloide en el punto A.*

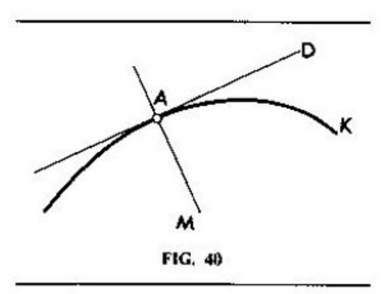
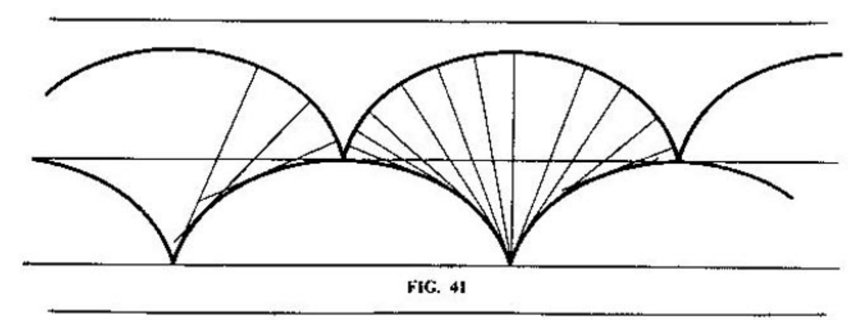


FIG. 40

Si K es cierta curva, A es un punto de ésta y AD es la tangente a la curva K en el punto A (fig. 40), a la línea recta que pasa por el punto A y que es perpendicular a la tangente AD, se la denomina *normal* a la curva K en el punto A. De la fig. 39 es evidente que la recta AO sirve de normal a la cicloide en el punto A.


FIG. 41

Notaremos además que la longitud del segmento MO es igual a la longitud del arco AO de la circunferencia, pues la rodadura transcurre sin resbalamiento.

Constataremos ahora una propiedad importante de la cicloide. Examinemos las dos cicloides expuestas en la fig. 41. Ahora demostraremos que *cualquier normal a la cicloide superior es tangente a la cicloide inferior* (e, inversamente, cualquier tangente a la cicloide inferior es normal a la superior). Con otras palabras, la cicloide inferior es la *envolvente* de las normales trazadas respecto a la

cicloide superior. Si en todos los puntos de cierta curva *K* se han trazado normales, a la envolvente de éstas se la denomina *evoluta* de la línea *K* (fig. 42). De tal manera, la propiedad de la cicloide

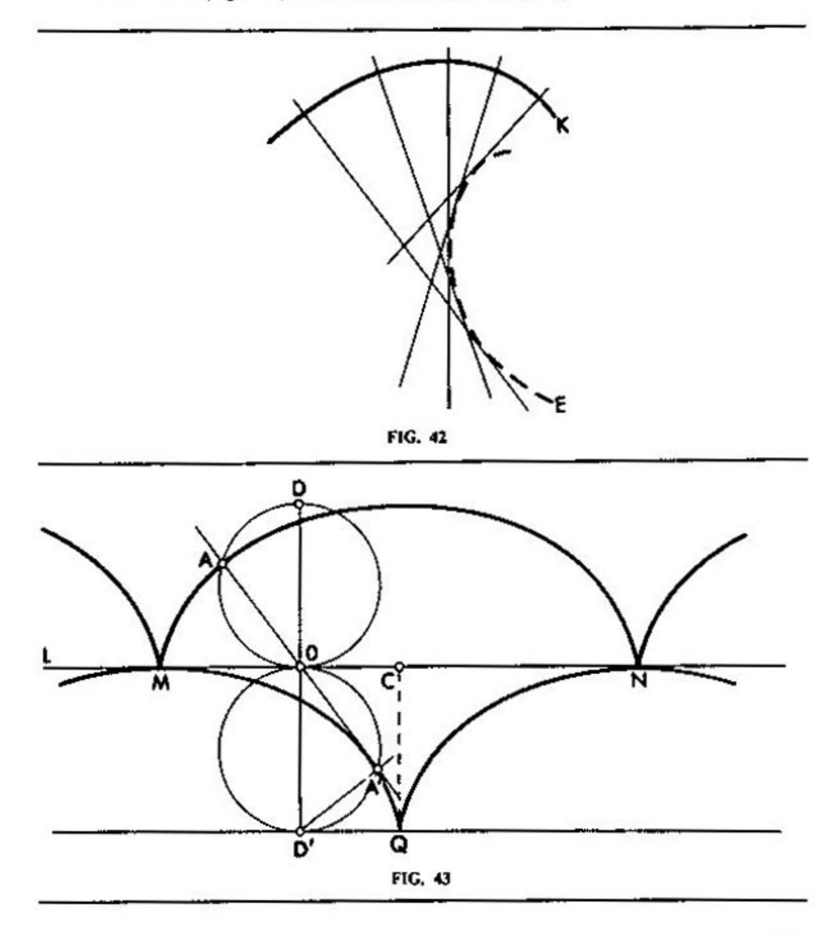


FIG. 42

FIG. 43

que anteriormente formulamos significa que *la evoluta de la cicloide es igual a la primera, pero desplazada*: en la fig. 41 la evoluta de la cicloide superior es la cicloide inferior.

Demostremos esta propiedad de la cicloide. Examinemos cierta posición del círculo con la rodadura del cual por la recta *L* quedó formada la cicloide superior (fig. 43). Las letras *A*, *O* y *D* tienen el mismo significado que en la fig. 39. Construyamos un círculo

que sea simétrico al que acabamos de examinar respecto al punto O, y supongamos que A' y D' son puntos simétricos a los puntos A y D. Entonces el segmènto MO tiene la misma longitud que el arco OA, y el segmento MC tiene la misma longitud (igual a πr) que la semicircunferencia OD. Por consiguiente, el segmento OC es de una misma longitud que el arco AD. Con otras palabras, el segmento $D'Q$ tiene la misma longitud que el arco $D'A'$. Pero esto significa que el punto A' yace en la cicloide inferior, y el círculo inferior en la fig. 43 corresponde precisamente a este punto A'. De las propiedades de las tangentes y normales demostradas más arriba se deduce ahora (en virtud de que D' es el centro momentáneo de rotación durante la rodadura del círculo por la recta L') que OA' es tangente y $A'D'$ es normal a la cicloide inferior. Puesto que los segmentos OA y OA' son la continuación uno del otro veremos que la normal AA' respecto a la cicloide superior, elegida arbitrariamente, es una tangente para la cicloide inferior.

CAPÍTULO IV

LA ENVOLVENTE

1. FAMILIAS DE LÍNEAS Y SUS ENVOLVENTES

De toda una seria de cuestiones examinadas en los capitulos I, II y III quisieramos subrayar los hechos ligados al estudio de las figs. 10, 20, 21, 38 y 41. En cada uno de estos casos tenemos una multitud infinita de curvas o, como se dice, *una familia de curvas*: en el primer caso *una familia de parábolas*, en el segundo y tercer caso *una familia de circunferencias* y, en los dos últimos casos, *una familia de rectas* (en los dibujos, como es comprensible, no se exponen todas las líneas de la familia, ya que su número es infinito, sino solamente algunas de ellas). En todos los casos las líneas de la familia que examinamos rellenan en el plano cierta zona (de tiro en el capitulo primero, de audibilidad en el segundo), y la curva que limita esta zona, en cada uno de sus puntos, contacta con cierta línea de la familia. A esta curva nosotros la denominamos *envolvente*. Así, en el ejemplo expuesto en la fig. 10, tenemos una familia de parábolas: las trayectorias de los proyectiles. La envolvente de esta familia (la parábola de seguridad) contacta en cada uno de sus puntos con una de las líneas de la familia, es decir, con una de las trayectorias del proyectil. En el ejemplo expuesto en la fig. 20 tenemos que ver con una familia de circunferencias. La envolvente de esta familia de líneas (una de las ramas de la hipérbola) contacta en cada uno de sus puntos con una de las líneas de nuestra familia, es decir, con una de las circunferencias.

En general, *si tenemos cierta familia de lineas resulta ser que se denomina envolvente de dicha familia la linea que en cada uno de sus puntos contacta con una de las líneas de la familia dada.* Citaremos ejemplos simples. Examinemos una familia de curvas compuesta de circunferencias de un mismo radio R con centros en la recta dada l (fig. 44). Es obvio que la envolvente de esta familia se compone de dos rectas paralelas que se encuentran a la distancia R de la recta l. A continuación, si examinamos la familia de circunferencias con radio R cuyos centros se encuentran en una circunferencia dada de radio r, resulta ser (cuando $r > R$)

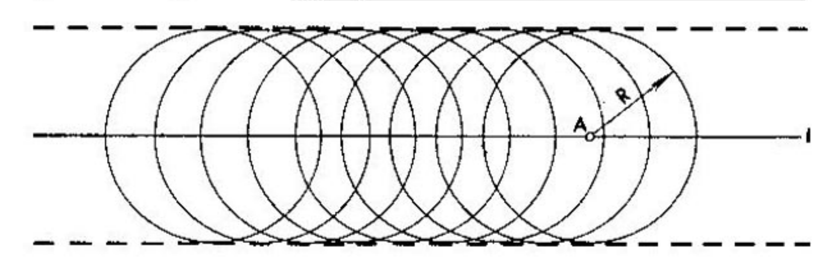


FIG. 44

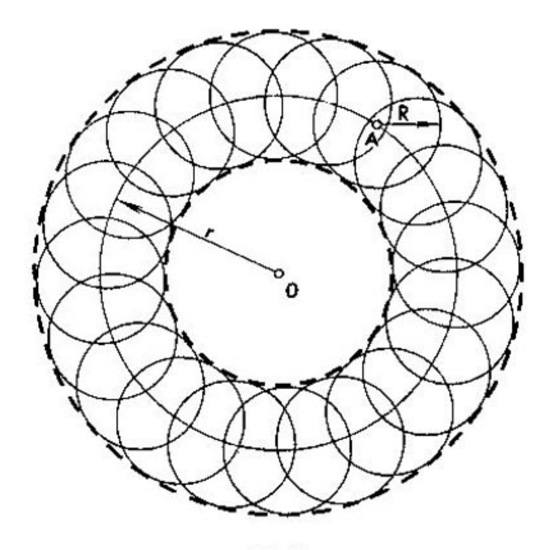


FIG. 45

que la envolvente de esta familia estará compuesta de dos circunferencias con radios $r + R$ y $r - R$ (fig. 45).

Y, por último, un simple ejemplo más. Examinemos la familia compuesta por todas las rectas que pasan a una misma distancia R respecto al punto dado O (fig. 46). Es evidente que la envolvente de esta familia de rectas es una circunferencia con radio R cuyo centro yace en el punto O.

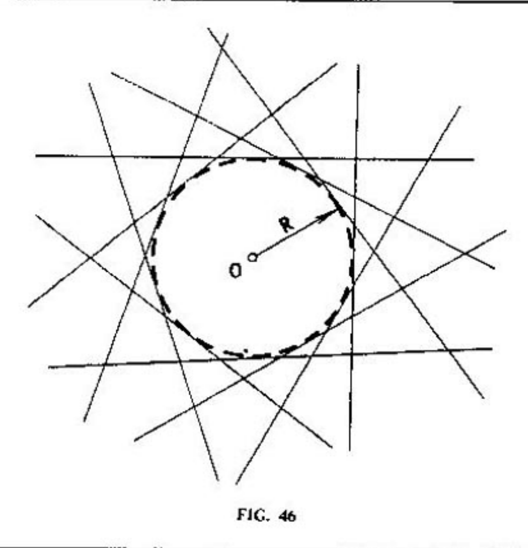


FIG. 46

2. ECUACIÓN DE LA FAMILIA DE LÍNEAS

Ahora queremos aclarar de qué manera, mediante fórmulas, se puede representar una familia de líneas. Para ello analizaremos más detalladamente los ejemplos ya examinados anteriormente.

Examinemos de nuevo la familia de circunferencias con radio R y centros en la recta l (fig. 44). Tomemos a la recta l por el eje de las abscisas del sistema de coordenadas y tracemos el eje de ordenadas perpendicular a dicha recta. Supongamos que A es cierto punto de la recta l; designemos la abscisa de éste por α (la ordenada del punto A, por lo visto, es igual a cero). De acuerdo a (18) la circunferencia con centro en el punto A y de radio R se describe con la ecuación

$$(x-\alpha)^2+y^2=R^2$$

(que se obtiene al considerar en (18) que β es igual a cero), o, lo que es lo mismo, con la ecuación

$$x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-R^2=0. \qquad (35)$$

En la ecuación (35) entra el número α. Para cada α obtenemos una de las circunferencias de la familia, precisamente aquella cuyo centro se encuentra en el punto con abscisa α. Dando al número α todos los valores posibles y trazando cada vez la circunferencia que se obtiene, conseguiremos toda la familia de circunferencias que examinamos. Por esta razón a la relación (35) se la denomina *ecuación de la familia de circunferencias que se examina*. La magnitud α, que a la par de las coordenadas x, y entra en la ecuación (35), se denomina *parámetro*.

Examinemos ahora las circunferencias de los círculos K_A que estudiamos en el capítulo segundo (vean fig. 20). Elijamos a una de estas circunferencias; su centro se encuentra en el punto A con abscisa vt y su radio es igual a $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. Designemos por α al número vt $\left(\text{así que } t = \frac{\alpha}{v}\right)$ y, recordando que $\frac{u}{v} = \frac{h}{c}$ (vean (20)), encontraremos:

$$\sqrt{u^2t^2 - h^2} = \sqrt{\frac{u^2}{v^2}\alpha^2 - h^2} = \sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right)}.$$

Así el radio de la circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto A con abscisa α es igual a $\sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right)}$. De acuerdo a (18) la ecuación de esta circunferencia tiene el aspecto

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right),$$

ó, después de abrir los paréntesis,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) + h^2 = 0. \qquad (36)$$

Para cada α esta ecuación nos proporciona una de las circunferencias de la familia expuesta en la fig. 20 y, dando al parámetro α todos los valores positivos posibles, obtendremos toda la familia de circunferencias que examinamos.

Las fórmulas (35) y (36) nos permiten hacer la deducción siguiente. *La familia de líneas puede ser representada mediante una ecuación con tres incógnitas x, y, α, en la que x, y son las coordenadas de los puntos y α es el parámetro (magnitud auxiliar); para cada α concreto esta ecuación nos proporciona una de las líneas de la familia*

que examinamos; dando al número α *todos los valores posibles y trazando toda vez la línea que se obtiene, conseguiremos toda la familia de líneas que examinamos.*

Convendremos escribir la ecuación de la familia de lineas en forma de

$$f(x, y, \alpha) = 0, \tag{37}$$

donde $f(x, y, \alpha)$ significa aquello que está escrito en la parte izquierda de la relación (35) ó (36), o de cualquier otra ecuación análoga. En lo sucesivo examinaremos solamente aquellos casos en los que la función $f(x, y, \alpha)$ es un *polinomio* que une las magnitudes x, y, α.

Sin embargo, no siempre es cómodo representar a las familias de líneas con una ecuación de tipo (37). Para comprender esto y encontrar un procedimiento más de representación de las familias de líneas, examinaremos los dos ejemplos siguientes.

Tomemos la familia de circunferencias expuesta en la fig. 45. Admitiremos al punto O como el origen del sistema de coordenadas. Supongamos que A es cierto punto que yace en la circunferencia de radio r con centro en el origen de las coordenadas. Designemos a las coordenadas de A por α, β. Entonces los números α y β verificarán la relación

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \tag{38}$$

La circunferencia de radio R con centro en el punto A, de acuerdo a (18), tiene la ecuación

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{39}$$

Las relaciones (38), (39) son las que determinan la familia de circunferencias que examinamos. Precisamente la ecuación (39) proporciona una circunferencia de radio R y centro *arbitrario*; la relación (38), por el contrario, exige que dicho centro se encuentre en la circunferencia con radio r y centro en el punto O. Abriendo los paréntesis y pasando todos los miembros a la parte izquierda volveremos a ecsribir las relaciones (38), (39) en forma de

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

La primera de estas relaciones, además de x, y, contiene dos parámetros α, β; la segunda relación vincula entre sí estos dos

parámetros. Precisamente esta es la forma en la que vamos a examinar la ecuación de nuestra familia de circunferencias *).

Y, por último, un ejemplo más. Examinemos las trayectorias de los proyectiles qué ya estudiamos en el capítulo primero (vean fig. 10). Designando a las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial por α y β, y a la altura del proyectil por la letra y (en lugar de h), podremos describir el movimiento del proyectil mediante las fórmulas (vean (3), (4))

$$\begin{cases} x = \alpha t, \\ y = \beta t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Hallando con ayuda de la primera de estas relaciones el valor de t y sustituyéndolo en la segunda relación obtendremos

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{gx^2}{2\alpha^2},$$

o, después de multiplicar por $2\alpha^2$ y de pasar todos los miembros a la parte izquierda,

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0.$$

Precisamente con esta ecuación se determina la trayectoria del movimiento del proyectil. Puesto que α y β son las componentes de su velocidad inicial v_0 resulta ser que (vean fig. 7)

$$\alpha^2 + \beta^2 = v_0^2.$$

De esta forma la familia de trayectorias que examinamos se describe con las relaciones

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0, \tag{41}$$

la primera de las cuales, además de las coordenadas x, y, contiene dos parámetros α, β, y la segunda une entre sí estos parámetros.

Las fórmulas (40) y (41) nos permiten hacer la deducción siguiente. *La familia de líneas puede ser representada mediante dos*

---

*) Advertiremos que habiendo resuelto la segunda de las relaciones (40) respecto a β y sustituyendo el valor hallado en la primera relación podríamos obtener una ecuación con un parámetro α, es decir, una ecuación de tipo (37). Sin embargo, las relaciones (40) son más cómodas ya que no contienen raíces y signo doble, que se obtiene al sustituir $\beta = \pm\sqrt{r^2 - \alpha^2}$.

ecuaciones:

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \tag{42}$$

$$g(\alpha, \beta) = 0, \tag{43}$$

la primera de las cuales contiene las coordenadas x, y y dos parámetros α, β, mientras que la segunda enlaza entre sí estos dos parámetros. Habiendo elegido determinados valores de los parámetros α y β que verifiquen la relación (43), con ayuda de la ecuación (42), hallaremos una de las líneas de la familia que examinamos, y atribuyendo a los parámetros α y β todos los valores posibles, supeditados a la condición (43), obtendremos toda la familia de líneas que examinamos.

En general, si queremos representar una familia de líneas mediante la ecuación

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \tag{44}$$

que (aparte de x, y) contiene m parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, debemos tener además $m - 1$ relaciones

$$\left\{\begin{array}{l} g_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0 \end{array}\right. \tag{45}$$

entre estos parámetros.

3. INTERSECCIÓN DE LAS LÍNEAS DE LA FAMILIA

Ahora pasaremos a la cuestión respecto a cómo hallar, conociendo la ecuación de la familia de líneas, la envolvente de esta familia.

Supongamos que C es la envolvente de cierta familia de líneas (fig. 47). Examinemos cualquier línea L de nuestra familia. Esta línea contacta con la envolvente C (fig. 48) en cierto punto T, y está situada hacia un lado*) de esta última. Elijamos en la

*) Debemos anotar que pueden existir líneas con las que contactan todas las líneas de la familia, pasando de una parte a otra (fig. 49). Semejantes líneas también se adjuntan a las envolventes. Para mayor claridad omitiremos este caso en el examen, es decir, vamos a suponer que cada línea de la familia contacta con la envolvente disponiéndose hacia un lado de ésta. No obstante se puede demostrar que el procedimiento para hallar las envolventes, que más abajo estableceremos, es general (es decir, permite hallar también envolventes del tipo expuesto en la fig. 49).

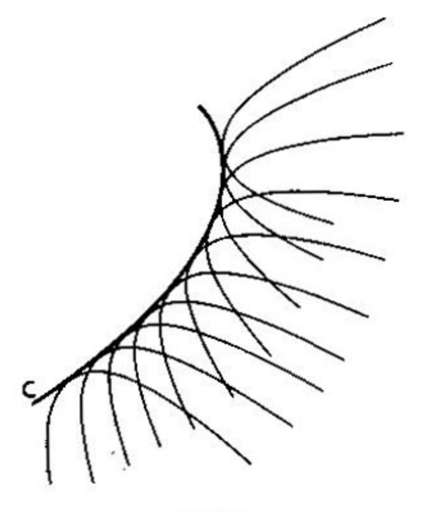


FIG. 47

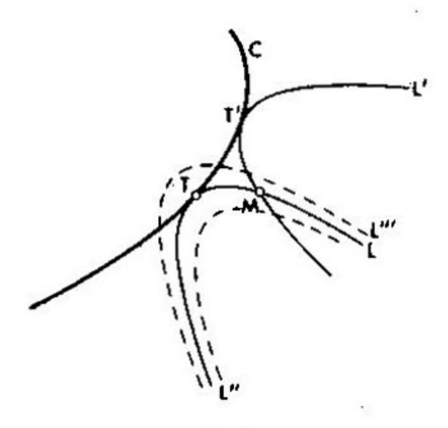


FIG. 48

envolvente cualquier punto arbitrario T', próximo a T, y designemos por L' aquella línea de la familia que contacta con la envolvente en el punto T'. Esta línea L' pasará cerca de la línea L. Si en las proximidades del punto T la línea L' yaciera totalmente hacia un lado de L, resultaría ser que esta primera o bien no tendría absolutamente puntos comunes con la envolvente (L'') o bien tendría una doble intersección con ella (L'''). Sin embargo, tanto uno como lo otro es contradictorio, ya que la línea L' contacta con la envolvente. Por lo tanto la línea L' no puede yacer totalmente a un lado de L, es decir, pasa de un lado de la línea L hacia el otro lado. Esto significa que las líneas L y L' se cortan en cierto punto M.

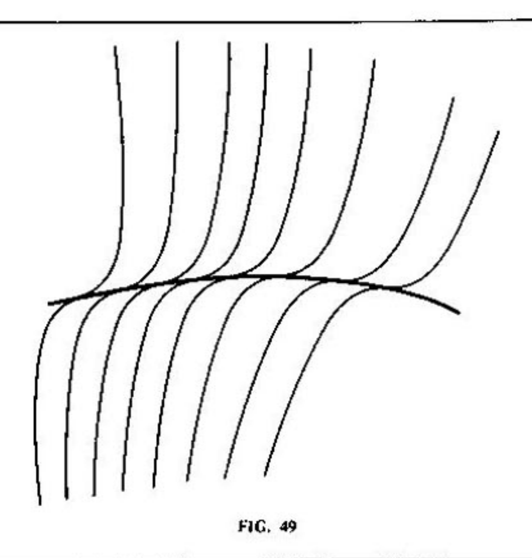


FIG. 49

Cuanto más cerca de L se dispone la línea L' tanto más cerca de T se encontrará el punto M (fig. 50) Con otras palabras, para hallar en la línea L aquel punto T en el que la línea L contacta con la envolvente es menester examinar las líneas L' de nuestra familia que son *más y más próximas* a L; entonces el punto M, en el que la línea L se corta con L', se aproximará al punto incógnito T. Este hecho a veces se expresa con palabras: todo

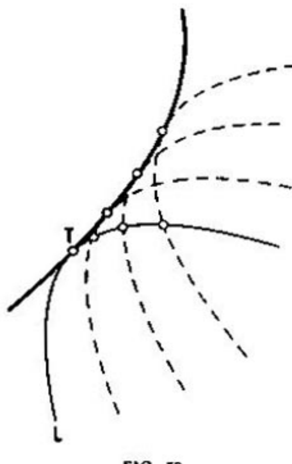


FIG. 50

punto T de la envolvente es un punto de intersección de dos líneas "infinitamente próximas" de la familia que examinamos.

Estos razonamientos juegan un papel decisivo al hallar la envolvente. Demostraremos esto en el ejemplo de la familia de circunferencias determinada por la ecuación (35). Elijamos dos circunferencias L y L' de nuestra familia situadas una cerca de otra. Designemos por α el valor del parámetro que corresponde a la circunferencia L, y por α' el valor del parámetro que corresponde a la circunferencia L'. Los números α y α' se diferencian poco entre sí pues las circunferencias fueron elegidas entre las "inmediatas" (recordemos que α y α' son las abscisas de aquellos puntos que son centros de las circunferencias L y L'). Dicho de otro modo, podemos escribir $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, donde ε es un número de valor absoluto muy pequeño. Para escribir las ecuaciones de las circunferencias L y L' debemos atribuir al parámetro en la ecuación (35) los valores α y $\alpha + \varepsilon$:

$$\left.\begin{aligned} &(L) & x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ &(L') & x^2 + y^2 - 2(\alpha + \varepsilon)x + (\alpha + \varepsilon)^2 - R^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Los puntos que yacen en la circunferencia L satisfacen a la primera ecuación, y los puntos que yacen en la circunferencia L' satisfacen a la segunda. Los puntos de intersección de estas circunferencias yacen tanto en L como en L', así es que satisfacen

a ambas ecuaciones escritas. Por esto, para hallar los puntos de interesección, es suficiente resolver conjuntamente estas dos ecuaciones como un sistema. Dejaremos sin variar la primera ecuación mientras que de la segunda, para simplificar el sistema, restamos la primera. Obtendremos

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2\varepsilon x + 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Señalaremos ahora que el número ε, aunque es muy pequeño, es obligatoriamente diferente de cero: en efecto, L y L' son dos circunferencias *diferentes* de nuestra familia y, por lo tanto $\alpha \neq \alpha'$. Por esto la parte izquierda de esta última ecuación se puede dividir por ε, y obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha + \varepsilon = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Resolviendo este sistema obtendremos los puntos de intersección de las líneas L y L'. Sin embargo, recordemos que no son estos puntos de intersección los que nos interesan. Nosotros debemos *aproximar* la línea L' a L y hallar aquellos puntos hacia los que se aproximan los puntos de intersección de las líneas L y L'. Pero ¿qué significa "aproximar" la línea L' hacia L? Esto significa coger un ε cada vez más próximo a cero. Si cogemos un ε cada vez menor y menor, aproximándolo a cero, resulta ser que la segunda ecuación (48) se sustituirá por la relación $-2x + 2\alpha = 0$, es decir, en el "límite", el sistema adquiere el aspecto de

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

La segunda de estas ecuaciones nos demuestra que $\alpha = x$ y, por consiguiente, de la primera ecuación encontramos

$$y^2 = R^2. \tag{50}$$

Así pues, el punto en el que la circunferencia L contacta con la envolvente debe satisfacer la ecuación (50). Puesto que esto es justo para *cualquier* circunferencia de nuestra familia entonces *todo punto de la envolvente debe satisfacer la ecuación obtenida* (50). A la inversa, cualquier punto que satisface la ecuación (50) es un punto de la envolvente. Esto se puede demostrar mediante el cálculo, pero es aún más fácil verlo geométricamente: en efecto, la ecuación (50) se descompone en dos ecuaciones $y = R$ y $y = -R$, que

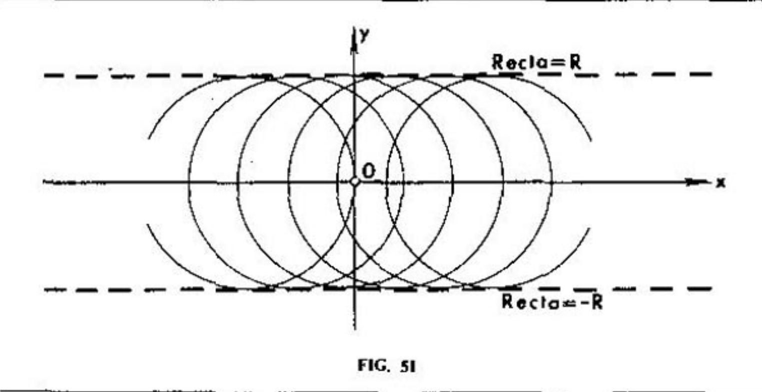


FIG. 51

representan dos rectas paralelas al eje de las abscisas y que se encuentran a la distancia R de éste (fig. 51). De tal manera, los razonamientos efectuados nos ayudaron deducir la ecuación (50), que precisamente determina a la envolvente.

4. DIFERENCIACIÓN Y DETERMINACIÓN DE LAS ENVOLVENTES

Es evidente que la envolvente expuesta en la fig. 51 podría ser determinada inmediatamente, ya que la familia de circunferencias que elegímos era muy simple. No obstante, aquella deducción *algebraica* de la ecuación de la envolvente, que más arriba fué expuesta, no utilizaba de ninguna manera la simplicidad del orden geométrico de la familia que examinamos; de manera análoga se puede deducir también la ecuación de la envolvente en otros casos.

Repetiremos los razonamientos en aspecto general. Supongamos que se trata de una familia de líneas

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0.$$

Elegiremos dos líneas "próximas" L y L' de esta familia, para lo cuál atribuiremos al parámetro los valores de α y $\alpha + \varepsilon$:

$$\left.\begin{array}{ll}(L) & f(x,\ y,\ \alpha) = 0,\\ (L') & f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon) = 0.\end{array}\right\}$$

(comparen las ecuaciones (46)). Para hallar el punto de intersección (o los puntos de intersección, si estos son varios) de las líneas L y L' debemos resolver estas ecuaciones conjuntamente, como un sistema. Recordemos ahora como de la ecuación (46) obtuvimos (47): dejamos la primera ecuación sin variarla y restamos la primera ecuación de la segunda. De manera análoga hemos actuado en el caso general. Entonces obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ \alpha) &= 0, \\ f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon) - f(x,\ y,\ \alpha) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Advertiremos que para pasar a las ecuaciones (48) dividimos la parte izquierda de la segunda ecuación por ε; procederemos aquí del mismo modo:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ \alpha) &= 0, \\ \frac{f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon) - f(x,\ y,\ \alpha)}{\varepsilon} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Este sistema nos proporciona los puntos de intersección de las líneas L y L'. Ahora vamos a aproximar L' hacia L, es decir, vamos a coger un número ε cada vez más próximo a cero. Con ello en el sistema (48) la ecuación segunda se simplificó un poco y, "en el límite", obtuvimos el sistema (49), con el que determinamos la envolvente. Es natural esperar que en el caso del sistema (51) la segunda ecuación también pasará en el límite a ser cierta ecuación más simple, que también permitirá determinar la envolvente. La cuestión respecto a cual será la ecuación que se obtendrá de la segunda ecuación (51) en el límite se resuelve mediante el lema siguiente.

Lema 2. *Supongamos que $f(x,\ y,\ \alpha)$ es cierto polinomio. Vamos a colocar a éste según las potencias de α, es decir, lo escribiremos en forma de*

$$f(x,\ y,\ \alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \ldots, \tag{52}$$

donde los coeficientes p_0, p_1, p_2, p_3 también son ciertos polinomios de x, y. Entonces la parte izquierda de segunda ecuación (51) *es un polinomio, es decir, podemos escribir*

$$\frac{f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon) - f(x,\ y,\ \alpha)}{\varepsilon} = f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) + \ldots, \tag{53}$$

donde $f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)$ significa la suma de todos los miembros que no contienen ε, y en (53) *con los puntos suspensivos se designa la suma*

de los miembros restantes, cada uno de los cuales contiene como factor el número ε o cierta potencia de éste. Con esto el polinomio $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ tiene el aspecto siguiente:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots \tag{54}$$

Demostración.

$$\frac{f(x, y, \alpha + \varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\{p_0 + p_1(\alpha + \varepsilon) + p_2(\alpha + \varepsilon)^2 +$$

$$+ p_3(\alpha + \varepsilon)^3 + \ldots - [p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \ldots]\} =$$

$$= p_1\frac{(\alpha + \varepsilon) - \alpha}{\varepsilon} + p_2\frac{(\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2}{\varepsilon} + p_3\frac{(\alpha + \varepsilon)^3 - \alpha^3}{\varepsilon} + \ldots =$$

$$= p_1 + p_2(2\alpha + \varepsilon) + p_3(3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + \varepsilon^2) + \ldots =$$

$$= (p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots) + \text{los miembros que contienen } \varepsilon. \tag{55}$$

El lema demostrado permite sustituir el sistema (51) de ecuaciones por el sistema

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0,\\ f'_\alpha(x, y, \alpha) + \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

en el que con puntos suspensivos se designan los miembros no escritos cada uno de los cuales contiene el factor ε. Al resolver este sistema (56) obtendremos los puntos de intersección de las líneas L y L'. Sin embargo, recordaremos que a nosotros nos interesan no los propios puntos de intersección. Debemos aproximar la línea L' hacia L y hallar aquellos puntos hacia los que se van a aproximar los puntos de intersección de las líneas L y L'. Con otras palabras, debemos coger un número ε cada vez menor y menor aproximándolo a cero. Con esto la segunda ecuación (56) se sustituirá por la relación

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0,$$

ya que todos los miembros designados con puntos suspensivos contienen el factor ε y, por consiguiente, se aproximarán a cero. Así es que, en el límite, el sistema (56) adquiere la forma de

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0,\\ f'_\alpha(x, y, \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Esto significa que el punto en el que la línea L contacta con la envolvente debe satisfacer a las relaciones (57). Puesto que esto es justo para *cualquier* línea de nuestra familia, resulta ser que

cada punto de la envolvente, para cierto valor de α, debe satisfacer a las ecuaciones obtenidas (57). Dicho de otro modo, si eliminamos el parámetro α en la ecuación (57), es decir, si hallamos su valor en una ecuación y lo sustituímos en la segunda, obtendremos una ecuación que ya no contiene α (es decir, que une solamente x y y) a la que debe satisfacer cualquier punto de la envolvente. De tal manera obtenemos el teorema siguinte.

Teorema 1. *Cada punto de la envolvente satisface la ecuación que se obtiene de las relaciones* (57) *al eliminar el parámetro* α.

El polinomio $f'_\alpha(x, y, \alpha)$, con cuya ayuda se obtuvieron las ecuaciones (57), se denomina *derivada* del polinomio $f(x, y, \alpha)$. El cálculo de la derivada se denomina *diferenciación* del polinomio $f(x, y, \alpha)$. Como se ve de las fórmulas (52), (54), la diferenciación de los polinomios se efectúa muy fácilmente: es preciso sustituir en cada sumando que contenga el factor α^k a éste por el factor $k\alpha^{k-1}$, y omitir los miembros que no contengan α.

Mostraremos ahora un teorema, análogo al teorema 1, pero relacionado al caso en que la familia de líneas queda determinada por la ecuación con dos parámetros α, β (vean (42), (43)).

Teorema 2. *Supongamos que la familia de líneas está determinada por las ecuaciones* (42), (43). *Entonces cada punto de la envolvente satisface a la ecuación que se obtiene de las relaciones*

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ g(\alpha, \beta) &= 0, \\ f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

omitiendo los parámetros α y β.

En la tercera de las ecuaciones (58) el polinomio $f'_\alpha = f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)$ se calcula *diferenciando por* α (es decir, sin prestar atención al parámetro β, se debe hallar la derivada, vean (52), (54)), y el polinomio f'_β se obtiene de $f(x, y, \alpha, \beta)$ *diferenciando por el parámetro* β. Esto también atañe a las derivadas g'_α y g'_β del polinomio $g(\alpha, \beta)$.

Para establecer la justeza de las fórmulas (58) nosotros, como antes, examinaremos dos líneas próximas L y L' de nuestra familia. Supongamos que la línea L corresponde a los valores α y β, y la línea L' corresponde a valores próximos de los parámetros $\alpha + \varepsilon_1$, $\beta + \varepsilon_2$. Dicho de otro modo, las ecuaciones de las líneas L y L' se escriben en forma

$$\left.\begin{aligned} &(L) \qquad f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ &(L') \quad f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

al mismo tiempo que los valores elegidos de los parámetros satisfacen

a la relación (43), es decir,

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Restemos la primera ecuación de la segunda (59) y procedamos análogamente con las relaciones (60). Obtendremos:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ g(\alpha, \beta) &= 0, \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) &= 0, \end{aligned}$$

ó, lo que es igual:

$$\left.\begin{aligned} & f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ & [f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2)] + \\ & \quad + [f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta)] = 0, \\ & g(\alpha, \beta) = 0, \\ & [g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta + \varepsilon_2)] + [g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta)] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Las dos primeras relaciones, que se examinan como un sistema respecto a x y y, determinan el punto de intersección de las líneas L y L'. En virtud de la fórmula (53) podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) &= \varepsilon_1 (f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots), \\ f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) &= \varepsilon_2 (f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \ldots), \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) &= \varepsilon_1 (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots), \\ g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) &= \varepsilon_2 (g'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots). \end{aligned}$$

De tal manera las relaciones (61) se vuelven a escribir en forma

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ \varepsilon_1 (f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) + \varepsilon_2 (f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \ldots) = 0, \\ \varepsilon_1 (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) + \varepsilon_2 (g'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Con puntos suspensivos aquí se designan los miembros que contienen el factor ε_1 ó ε_2. Multiplicando a la tercera relación (62) por

$$\varepsilon_1 (g'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots) - \varepsilon_2 (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots),$$

y a la cuarta relació : por

$$-\varepsilon_1 (f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \ldots) + \varepsilon_2 (f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)$$

y sumando, después de la reducción de los miembros semejantes y agrupación, obtenemos

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) [(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)(g'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots) - \\ - (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \ldots)] = 0. \end{aligned}$$

El número $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, indispensablemente, se diferencia de cero, ya que de $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 0$ resultaría que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ y, por consiguiente, las curvas L y L' coincidirían, lo que no es así. De esta manera, la última relación

se puede dividir por $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, y obtendremos

$$(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)(g'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots) - $$
$$- (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \ldots) = 0.$$

Esta relación, conjuntamente con la primera de las relaciones (62), nos proporciona los puntos de intersección de las líneas L y L'. Si aproximamos la línea L' hacia L, es decir, si elegimos los números ε_1 y ε_2 cada vez más cerca de cero, resulta ser que la última relación, en el límite, pasa a ser la ecuación

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) \cdot g'_\beta(\alpha, \beta) - g'_\alpha(\alpha, \beta) \cdot f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

es decir, se convierte en la última de las relaciones (58). Esta, conjuntamente con la primera de las ecuaciones (58), nos permite hallar aquel punto en el que la línea L contacta con la envolvente. De tal guisa, atribuyendo a la relación obtenida las dos primeras ecuaciones (62), hallaremos el sistema de igualdades (58). El punto en el que la línea L contacta con la envolvente debe satisfacer este sistema. Puesto que por L se puede admitir *cualquiera* de las líneas de la familia, resulta que *cualquier* punto de la envolvente debe (para ciertas α, β) satisfacer el sistema (58), que es lo que afirma el teorema 2.

El lector, que conoce la noción del determinante y los teoremas fundamentales respecto a las ecuaciones lineales, puede cerciorarse de la justeza del teorema siguiente. *Si la familia de líneas está determinada por las ecuaciones* (44), (45), *resulta ser que cualquier punto de la envolvente satisface a la ecuación que resulta si añadimos a* (44), (45) *la relación*

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha_1} & f'_{\alpha_2} & \cdots & f'_{\alpha_m} \\ (g_1)'_{\alpha_1} & (g_1)'_{\alpha_2} & \cdots & (g_1)'_{\alpha_m} \\ (g_2)'_{\alpha_1} & (g_2)'_{\alpha_2} & \cdots & (g_2)'_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (g_{m-1})'_{\alpha_1} & (g_{m-1})'_{\alpha_2} & \cdots & (g_{m-1})'_{\alpha_m} \end{vmatrix} = 0$$

y eliminamos del sistema de igualdades obtenido los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Cuando $m = 1$ este teorema se reduce al teorema 1, y cuando $m = 2$ se reduce al teorema 2.

5. LÍNEA DISCRIMINANTE

En los teoremas 1 y 2 se habla de que cualquier punto de la envolvente satisface la ecuación que se obtiene al eliminar los parámetros en las relaciones (57) ó (58). Nosotros no dijimos que la envolvente se determina exactamente por la ecuación que se obtiene, y solamente afirmamos que cualquier punto de la envolvente satisface esta ecuación. Esto no es casual. El hecho reside en que la línea determinada por la ecuación que se obtiene al eliminar los parámetros en (57) ó (58) (esta línea se denomina

línea discriminante), además de la envolvente, puede contener una serie de puntos que no pertenecen a ésta.

¿Qué representa en sí la línea discriminante? Para contestar a esta pregunta referiremos (sin aclaraciones, aunque todos los razonamientos se pueden efectuar utilizando la noción de la derivada que más arriba hemos introducido) lo que puede representar en sí una línea determinada por cierta ecuación. Supongamos que $f(x, y)$ es cualquier polinomio respecto a x, y. El lugar geométrico de puntos sobre el plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

se denomina *línea algebraica*. La línea recta es una línea algebraica, ya que su ecuación tiene el aspecto $y = kx + b$, ó $y - kx - b = 0$. Las relaciones (18), (22), (41) permiten llegar a la conclusión de que la circunferencia, la hipérbola, la parábola, son también ejemplos de líneas algebraicas.

La línea algebraica se denomina *lisa* si respecto a ella, en cada punto de ésta, se puede trazar una tangente. La recta, la circunferencia, la parábola y la hipérbola son líneas lisas. Pero puede suceder que la línea algebraica contiene *puntos singulares*, a los que atribuyen *los puntos crunodales* (en los que la curva se corta a sí misma), *puntos tacnodos* (en los que la curva es tangente a sí misma) y *puntos aislados*. Así, por ejemplo, la línea determinada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

(ésta se denomina *lemniscata de Bernoulli*, fig. 52) se corta a sí misma, la línea

$$y^2 - x^4 = 0$$

(fig. 53) tiene un punto de autocontacto en el origen de las coordenadas, y la línea determinada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)(y - x - 1) = 0,$$

se compone de puntos que pertenecen a la recta $y - x - 1 = 0$ (es decir, $y = x + 1$) y, además, del punto O (origen de las coordenadas), en las proximidades del cual no existen otros puntos de esta línea (fig. 54). Toda línea algebraica o bien no contiene puntos singulares, es decir, es lisa, o bien solamente contiene un número finito de puntos singulares, que la dividen en trozos lisos

aislados, y ningunos otros puntos singulares, aparte de los enumerados anteriormente, la línea algebraica no puede tener *).

Supongamos ahora que se ha dado una *familia* de líneas algebraicas determinada por la ecuación (37) ó (42), (43). Si cualquiera línea L de nuestra familia tiene un punto crudonal T (fig. 55) resulta ser que la línea L', "próxima" a la primera, debe cortar *obligatoriamente* a la línea L en cierto punto M cerca del punto T. Por esto, los razonamientos, con cuya ayuda establecimos

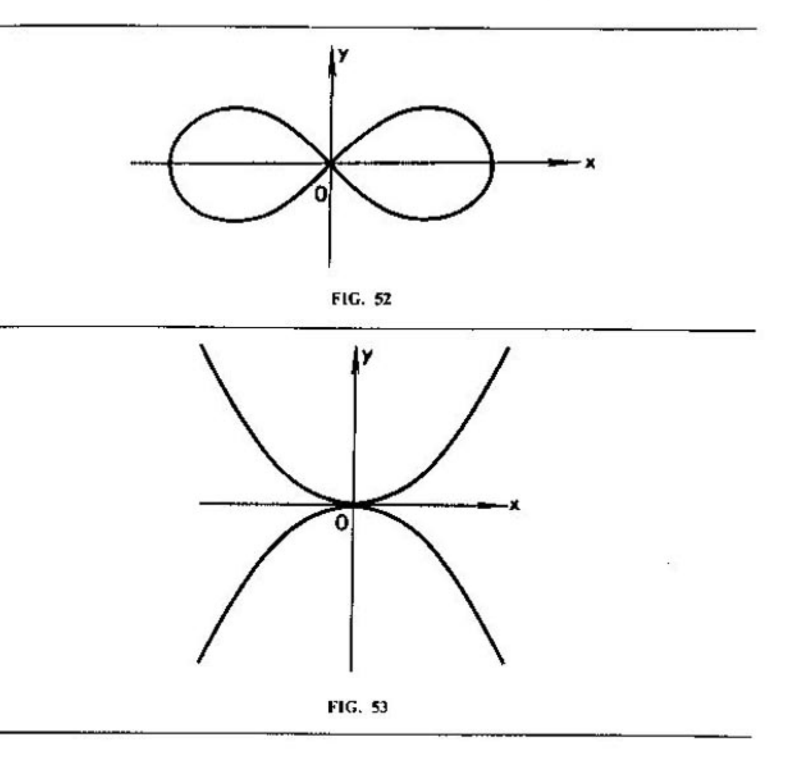


FIG. 52

FIG. 53

el teorema 1 ó el 2, nos demostrarán que las coordenadas del punto T satisfacen las ecuaciones (57) ó (58), es decir, *el punto T pertenece a la línea discriminante.* Así pues, los puntos crudonales de cada línea de la familia deben pertenecer a la línea discrimi-

*) Existen también los *puntos múltiplos*, que se obtienen si un punto "aislado" se encuentra en el arco liso de la curva.

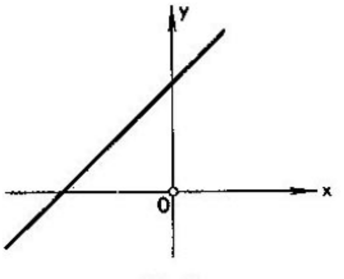


FIG. 54

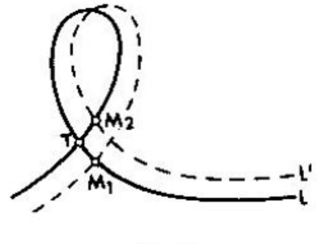


FIG. 55

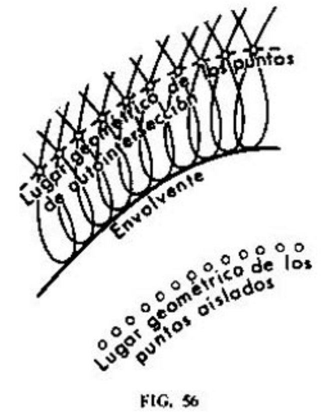


FIG. 56

nante. De igual manera, cualquier punto aislado de la línea L también debe pertenecer a la linea discriminante. De tal guisa la línea discriminante no solo contiene a la envolvente, sino que contiene también todos los puntos singulares de nuestra familia. Resulta ser que con esto ya se agotan todos los puntos de la línea discriminante, es decir, *la línea discriminante se compone de la envolvente y del lugar geométrico de los puntos singulares de todas las líneas de la familia que examinamos* (fig. 56). Si, por el contrario, examinamos una familia de líneas ninguna de las cuales tiene puntos singulares, entonces la línea discriminante no contiene nada más que la envolvente, es decir, en este caso la línea discriminante coincide con la envolvente. En los ejemplos que más abajo se examinan todas las familias constan de lineas que no tienen puntos singulares. Por esto nos limitaremos a hallar solamente la línea discriminante, ya que en los casos que examinamos ésta coincidirá con la envolvente, es decir, nos limitaremos con la eliminación de los parámetros en las ecuaciones (57) ó (58).

6. EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LAS ENVOLVENTES

Ejemplo 1. Examinemos de nuevo la familia de circunferencia (35), es decir, supongamos que

$$f(x,\ y,\ \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2).$$

La derivada de este polinomio es igual a

$$f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 2\alpha - 2x.$$

De tal manera, para determinar la envolvente, debemos eliminar α en las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2) = 0, \\ 2\alpha - 2x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Este mismo sistema también lo teníamos antes (vean (49)), y de él obtuvimos $y^2 = R^2$ (vean (50)). De tal guisa, la envolvente se compone de dos rectas paralelas $y = R$ y $y = -R$ (vean fig. 51).

Ejemplo 2. Examinemos ahora la familia de circunferencias

(36), es decir, supongamos que

$$f(x, y, \alpha) = \alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2\alpha x + (x^2 + y^2 + h^2).$$

La derivada de este polinomio es igual a

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2\alpha\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2x.$$

De tal modo, para determinar la envolvente debemos eliminar α de las ecuaciones

$$\alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2\alpha x + (x^2 + y^2 + h^2) = 0,$$

$$2\alpha\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2x = 0.$$

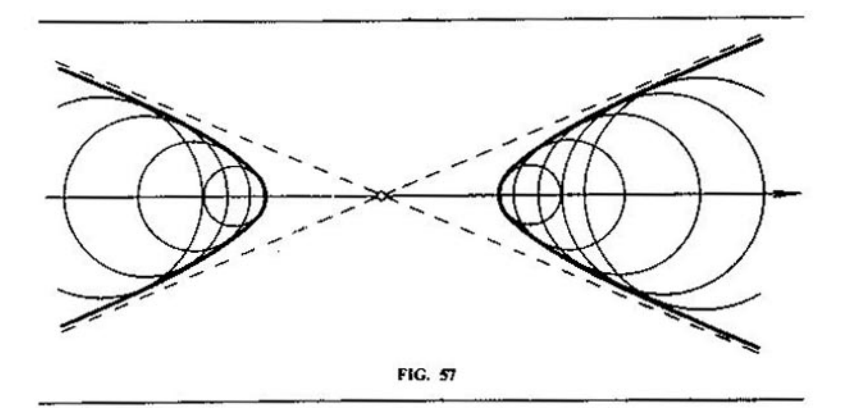


FIG. 57

Multiplicando la segunda de estas ecuaciones por $-\frac{\alpha}{2} + \frac{x}{2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}$ y agregando a la primera obtenemos

$$x^2 + y^2 + h^2 - \frac{x^2}{1 - \frac{h^2}{c^2}} = 0,$$

de donde, dividiendo por h^2 y reduciendo los miembros semejantes, hallamos la ecuación de la envolvente *) incógnita en la forma más simple (comparen (22))

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1 \text{ **)}.$$

Ejemplo 3. Examinemos la familia de trayectorias (41), es decir, supongamos

$$f(x, y, \alpha, \beta) = gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2.$$

Calculamos las derivadas:

$$f'_\alpha = 4\alpha y - 2\beta x, \quad f'_\beta = -2\alpha x, \quad g'_\alpha = 2\alpha, \quad g'_\beta = 2\beta.$$

La última de estas ecuaciones (58) adquiere la forma (después de simplificar por 4)

$$2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2) x = 0.$$

De tal guisa, para hallar la ecuación de la envolvente debemos eliminar α y β en las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 &= 0, \\ 2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2) x &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Multiplicando por β la primera de estas ecuaciones y por α la tercera, después de sumar, obtenemos una vez reducidos los

*) Hablando en rigor, por ahora solamente se ha demostrado que de las dos ecuaciones iniciales, que contienen el parámetro α, se deduce que x y y satisfacen la ecuación hallada de la hipérbola. ¿Es o no justo lo contrario, es decir, cualesquiera x, y, que satisfacen la ecuación de la hipérbola, satisfacerán con cierto α las ecuaciones iniciales? De la justeza de esto, en el caso que examinamos, uno se puede convencer efectuando cálculos en orden inverso. Semejante comprobación de la equivalencia de la ecuación obtenida a aquellas ecuaciones con parámetros que inicialmente teníamos debería también observarse en cada uno de los ejemplos ulteriores. Nosotros no vamos a hacer esto.

**) En el capitulo segundo no obtuvimos toda esta hipérbola, sino simplemente su rama derecha (vean fig. 20), es decir, a la ecuación de esta hipérbola se adicionó la desigualdad $x > 0$. Esto sucedió porque, por el sentido del problema, examinamos tan solo los α positivos, es decir, no todas las lineas de la familia (36), sino solamente las lineas que corresponden a α positivos. Si examinamos todas las circunferencias de la familia (36) resultará que la envolvente será toda la hipérbola obtenida (fig. 57).

miembros

$$g\beta x^2 - \alpha(\alpha^2 + \beta^2)\, x = 0,$$

ó, teniendo en cuenta la segunda de las ecuaciones (63),

$$g\beta x^2 - \alpha v_0^2 x = 0.$$

Puesto que es evidente que la línea $x = 0$, es decir, el eje de las ordenadas, no es la envolvente (geométricamente está claro de la fig. 10, y también algebraicamente: la línea $x = 0$ no es la solución de las ecuaciones (63)), esta última ecuación se puede reducir por x

$$g\beta x - \alpha v_0^2 = 0, \text{ es decir,}$$

$$\alpha = \frac{g\beta}{v_0^2} x.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación (63) este valor de α obtenemos (después de simplificar por $\beta^2 x$)

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Esta es precisamente la ecuación de la envolvente incógnita. Es fácil ver que esta línea coincide con la parábola de seguridad que hallamos en el capítulo I. Así, por ejemplo, eliminando t en las ecuaciones (12), (13) (y sustituyendo h por y), obtendremos exactamente la relación escrita más arriba.

Ejemplo 4. El segmento de longitud constante l resbala con sus extremos por dos rectas de mutua perpendicularidad. Hallemos la envolvente de estos segmentos (vean 38); esta envolvente, como ya se dijo en el capítulo III, se denomina *astroide*.

Supongamos que MN es uno de los segmentos que examinamos (fig. 58). Admitiremos que las dos rectas de mutua perpendicularidad por las que resbalan los extremos del segmento son los ejes de las coordenadas. Designemos por α la abscisa del punto M y por β la ordenada del punto N. Entonces, teniendo en cuenta que la longitud del segmento MN es igual a l, obtendremos del triángulo rectángulo OMN:

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2. \tag{64}$$

Además, el coeficiente angular de la recta MN, es decir, la tangente del ángulo XMN, es igual a $-\frac{\beta}{\alpha}$, ya que $\operatorname{tg} \angle XMN = -\operatorname{tg} \angle OMN$, y este mismo valor tiene también el coeficiente

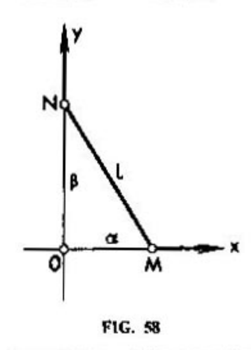


FIG. 58

angular para cualquier otra posición del segmento MN, es decir, durante la posición de este segmento en el segundo, tercero o cuarto cuadrante. De tal guisa, la ecuación de la recta MN tiene la forma

$$y = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \beta.$$

ó, después de multiplicar por α,

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0. \tag{65}$$

Llegamos al problema del cálculo de la envolvente de la familia de líneas rectas determinado por las ecuaciones (64), (65), ó, lo que es igual, por las ecuaciones (42), (43), en las que

$$f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta,$$
$$g(\alpha,\ \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - l^2.$$

Calculamos las derivadas:

$$f'_\alpha = y - \beta,\quad f'_\beta = x - \alpha,\qquad g'_\alpha = 2\alpha,\qquad g'_\beta = 2\beta.$$

La última de las ecuaciones (58) (después de reducir por 2) adquiere la forma

$$\beta y - \alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0. \tag{66}$$

De tal manera, para hallar la envolvente, debemos eliminar α y β en las ecuaciones (64), (65), (66). Multiplicando por α las ecuaciones (65) y por β la (66), después de sumar, obtenemos

$$(\alpha^2 + \beta^2)\,y = \beta^3.$$

de donde encontramos, teniendo en cuenta la relación (64),

$$\beta = [(\alpha^2 + \beta^2)\, y]^{1/3} = (l^2 y)^{1/3}.$$

De manera análoga, multiplicando la ecuación (65) por β y la (66) por $-\alpha$, después de sumar, obtenemos

$$\alpha = (l^2 x)^{1/3}.$$

Y, por último, sustituyendo estos valores de α y β en (64), hallamos

$$(l^2 x)^{2/3} + (l^2 y)^{2/3} = l^2,$$

ó, después de reducir por $l^{4/3}$,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}. \qquad (67)$$

Esta es, precisamente, la ecuación de la envolvente (es decir, de la astroide).

Ejemplo 5. En el plano se da un ángulo recto. Se trazan todas las rectas posibles que cortan en este ángulo triángulos cuya área es 2. Hallemos la envolvente de todas estas rectas (fig. 59).

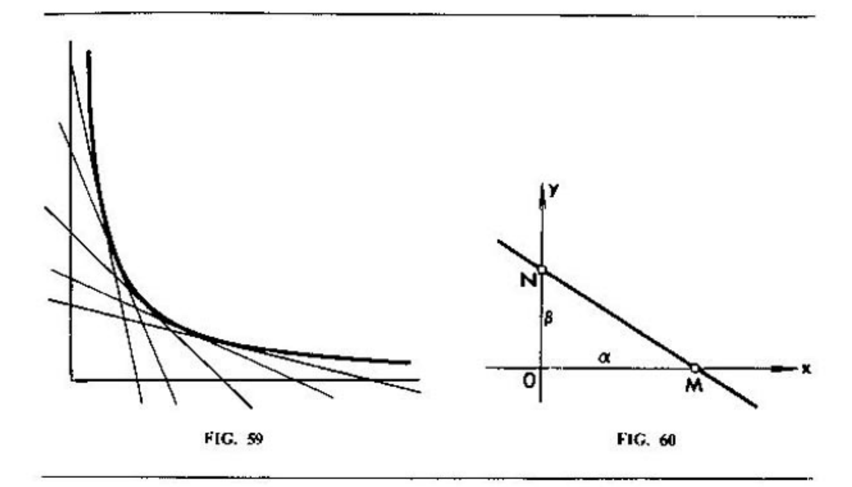


FIG. 59 FIG. 60

Admitamos los lados del ángulo dado por los ejes de las coordenadas. Elijamos una de estas rectas que cortan en este ángulo un triángulo de área 2, y supongamos que M, N son los puntos de intersección de esta recta con los ejes de las coordenadas (fig. 60). Designemos por α la abscisa del punto M y por β la

ordenada del punto N. Entonces, igual que antes (vean (65)), hallaremos que la recta MN se determina por la ecuación

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0. \tag{68}$$

Sin embargo, los números α y β ya no satisfacen a la condición (64), que denotaba que la longitud del segmento MN es igual a l, y sí satisfacen a la condición

$$\alpha\beta = 4, \tag{69}$$

que significa que el área del triángulo OMN es igual a 2 (ya que $OM = \alpha$, $On = \beta$, entonces $S_{\Delta OMN} = {}^1/_2\alpha\beta$). De tal manera llegamos al problema del cálculo de la envolvente de la familia de rectas, determinada por las ecuaciones (68), (69), o, lo que es igual, por las ecuaciones (42), (43), en las que

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha\beta - 4.$$

Calculamos las derivadas:

$$f'_\alpha = y - \beta, \; f'_\beta = x - \alpha, \quad g'_\alpha = \beta, \quad g'_\beta = \alpha.$$

La última de las ecuaciones (58) adquiere la forma

$$\alpha y - \beta x = 0. \tag{70}$$

De tal guisa, para el cálculo de la envolvente debemos eliminar α y β en las ecuaciones (68), (69), (70). De (68) y (70) obtenemos

$$\alpha y = \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad \beta x = \frac{1}{2}\alpha\beta.$$

Reduciendo por α a la primera de estas ecuaciones y por β a la segunda (esto es posible, ya que en virtud de (69) α y β son diferentes de cero), hallamos

$$\beta = 2y, \quad \alpha = 2x.$$

Y, por último, sustituyendo en la relación (69) los valores hallados de α y β obtenemos la ecuación que buscábamos de la envolvente

$$xy = 1. \tag{71}$$

Cualquier *tangente* a la línea (71) es una de las rectas de la familia que examinamos y, por consiguiente, corta en el ángulo recto dado un triángulo de área 2. Como ya vimos al final del capítulo II la hipérbola posee esta misma propiedad cuando sus asíntotas son perpendiculares entre sí; a semejante hipérbola se la denomina

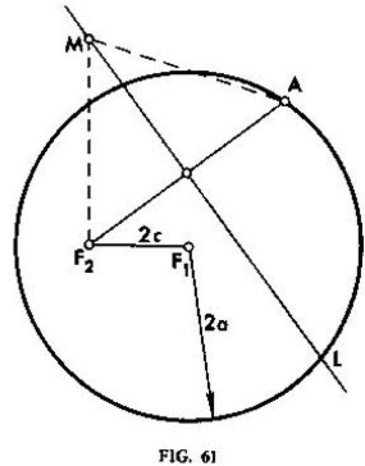


FIG. 61

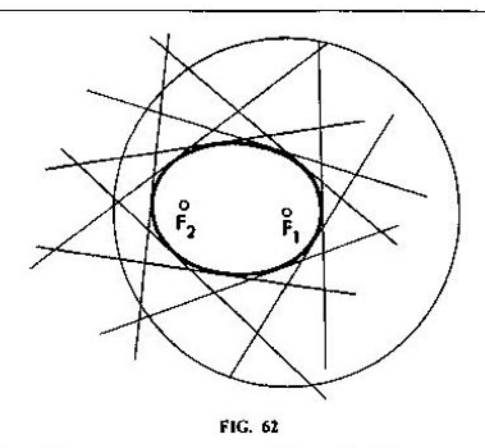


FIG. 62

equilátera. De esto se puede deducir que la línea (71) *es también una hipérbola.* La diferencia en la forma de escribir las ecuaciones (71) y (22), cada una de las cuales determina una misma línea (la hipérbola) se explica por el hecho de que las hipérbolas (71) y (22) están situadas de distinta manera respecto a los ejes de las coordenadas.

Ejemplo 6. Se examina una circunferencia con radio $2a$ y centro en el punto F_1 y el punto F_2 en el interior de esta circunferencia, que se encuentra a la distancia $2c$ respecto al centro.

El punto arbitrario A de la circunferencia se une con el punto F_2 mediante un segmento, y a través de la mitad de éste se traza una perpendicular L (fig. 61). Hallar la envolvente de la familia de semejantes perpendiculares (fig. 62).

Para resolver este problema admitiremos la recta F_1F_2 como eje de las abscisas y la perpendicular al segmento F_1F_2 en el centro de éste como eje de ordenadas. Entonces las abscisas de los puntos F_1 y F_2 serán iguales a c y $-c$. Supongamos que A es un punto arbitrario en la circunferencia que examinamos, y que α y β son las coordenadas de este punto. Para que el punto M, con coordenadas x, y, se encuentre en la perpendicular L trazada a través del centro del segmento AF_2 es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $MA = MF_2$, o, lo que es equivalente, la igualdad

$$MA^2 = MF_2^2.$$

Pero $MA^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ (vean pág. 28) y, analógicamente, $MF_2^2 = (x + c)^2 + y^2$. Así pues, la ecuación de la perpendicular L trazada a través del centro del segmento AF_2 se escribe en forma de

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

o, después de simplificaciones evidentes,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0. \qquad (72)$$

La ecuación de la circunferencia con radio $2a$ y centro en el punto F_1, con coordenadas $(c, 0)$, se escribe en forma de $(x - c)^2 + y^2 = (2a)^2$ (vean (18)). Puesto que el punto A yace en esta circunferencia, sus coordenadas α, β deben satisfacer la ecuación escrita, es decir,

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = 4a^2,$$

o, después de simplificaciones evidentes,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0. \qquad (73)$$

De tal manera el problema expuesto se reduce al cálculo de la envolvente de la familia de rectas dada por las ecuaciones (72), (73). Designando, como de costumbre, la parte izquierda de la ecuación (72) por $f(x, y, \alpha, \beta)$ y la parte izquierda de la ecuación (73) por $g(\alpha, \beta)$, escribiremos fácilmente la última de las ecuaciones (58):

$$(\alpha - x)\beta - (\beta - y)(\alpha - c) = 0. \qquad (74)$$

Precisamente de las ecuaciones (72), (73), (74) se obtiene la ecuación de la envolvente. Esta envolvente lleva el nombre de *elipse*; los puntos F_1 y F_2 se denominan focos de la elipse. La ecuación de la elipse se puede obtener eliminando los parámetros α y β en las ecuaciones (72), (73) y (74). No obstante, nosotros no haremos esto, pero sí deduciremos de la relación (74) algunas propiedades geométricas de la elipse que son interesantes.

Recordemos ante todo que al elegir los valores de α y β, que satisfacen a la segunda ecuación (58), es decir, al elegir cierta línea L de la familia que examinamos, las incógnitas x, y, que se hallan en el sistema (58), representan en sí las *coordenadas de aquel punto T en el que la línea L contacta con la envolvente*. En el caso que se examina esto significa que si elegimos los valores de α y β para que verifiquen la ecuación (73), es decir, si elegimos el punto A (fig. 63) en la circunferencia, resulta que las *incógnitas x, y, que*

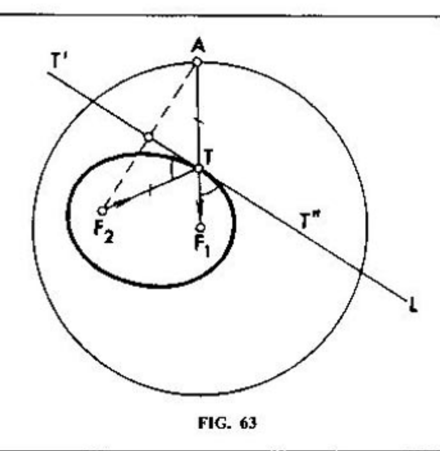


FIG. 63

se hallan mediante el sistema (72), (74), *representan en sí las coordenadas de aquel punto T en el que la perpendicular trazada a través del centro del segmento AF_2 es tangente a la elipse.* Así pues las coordenadas del punto de contacto T satisfacen la ecuación (74). Esta ecuación, después de transformaciones evidentes, se puede volver a escribir en forma de

$$y = \frac{\beta}{\alpha - c}x - \frac{\beta c}{\alpha - c},$$

de donde se ve que determina cierta *recta*. El punto T yace en esta recta, ya que sus coordenadas satisfacen esta ecuación. Es más, el punto F_1 también yace en esta recta (ya que sus coordenadas $x = c$, $y = 0$, evidentemente, satisfacen esta ecuación); también yace en esta recta el punto A (sus coordenadas, como es fácil ver, también verifican la ecuación escrita). De tal guisa, *los puntos* F_1, T *y* A *yacen en una misma recta.*

Recordemos ahora que la perpendicular L, que pasa a través del centro del segmento AF_2, es *tangente* a la elipse y está trazada a través de cualquier punto arbitrario T de ésta, ya que la elipse es la envolvente de todas semejantes perpendiculares. Aún más, los puntos F_2 y A son simétricos respecto a la recta L. Por último, los puntos F_1, T y A, como ya demostramos, yacen en una misma recta, es decir, el punto T yace en el radio F_1A. Así pues, *si trazamos una tangente arbirtaria* L *a la elipse resulta ser que el punto* A, *que es simétrico al foco* F_2 *respecto a la recta* L, *yacerá en la circunferencia con radio* $2a$ *cuyo centro es el foco* F_1*; el punto* T, *en el que la recta* L *contacta con la elipse, coincide con el punto de intersección de la recta* L *con el radio* F_1A.

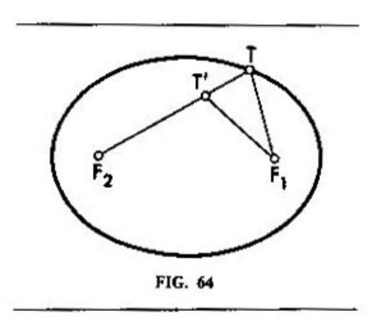


FIG. 64

Como los puntos F_2 y A son simétricos respecto a la recta L resulta que $TF_2 = TA$ y, por lo tanto, $TF_2 + TE_1 = 2a$. De tal manera, *la suma de las distancias desde el punto* T, *que yace en la elipse, hasta sus focos es igual a* $2a$. Esto es justo para cualquier punto que yace en la elipse, ya que en cada punto de ésta contacta con ella una de las rectas L (es que la elipse es la envolvente). No es difícil comprender que para el punto T', que yace en el interior de la elipse, la suma de las distancias $T'F_1$ y $T'F_2$ es menor que $2a$ (fig. 64), y que para el punto que yace fuera de la elipse esta suma es superior que $2a$. Así pues, *la elipse es*

el lugar geométrico de los puntos en el plano, la suma de las distancias de los cuales respecto a dos puntos dados, denominados focos de la elipse, es igual a un segmento dado 2a. Esta propiedad de la elipse, generalmente, se admite como determinación de ésta.

Además, puesto que los puntos F_2 y A son simétricos respecto a la recta L, y los segmentos F_1T y TA son la prolongación uno del otro, resulta que

$$\angle F_2TT' = \angle ATT' = \angle F_1TT''.$$

Esto significa que el rayo de luz que sale del punto F_2 en dirección F_2T, al reflejarse en la recta L según la ley "el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión", seguirá en lo sucesivo por el segmento TF_1. Pero la recta L contacta con la elipse en el punto T y, por consiguiente, la reflexión del rayo en el punto T de la recta L es equivalente a la reflexión de la propia elipse en el punto T. Así pues, *si colocamos en uno de los focos de la elipse una fuente puntiforme de luz resulta ser que cada rayo, al reflejarse en la elipse, seguirá a continuación hasta el segundo foco, es decir, todos los rayos reflejados se reunirán* ("enfocarán", y de aquí la denominación "foco") en el *segundo foco de la elipse* (fig. 65). Esta propiedad

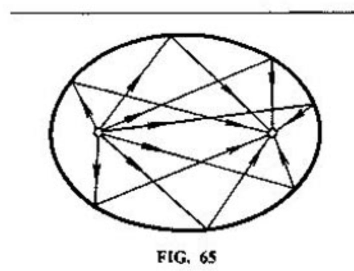


FIG. 65

"óptica" de la elipse recuerda la propiedad de la parábola establecida en el capítulo I. La hipérbola también tiene una propiedad análoga. Para finalizar anotaremos que la ecuación de la elipse que examinamos tiene la forma de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Esta ecuación puede ser obtenida de (72), (73), (74) eliminando los parámetros α y β; semejante eliminación de los parámetros exige transformaciones algebraicas no muy cortas y, por ello, aquí no las

exponemos. Generalmente la magnitud positiva $a^2 - c^2$ se designa por b^2, y la ecuación de la elipse se escribe en forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (75)$$

Observación. Hemos examinado algunos ejemplos de cálculo de las envolventes habiéndonos limitado solamente con *líneas algebraicas.* Lo dicho anteriormente se puede emplear también para las líneas no algebraicas (transcendentes). Los ejemplos más simples de líneas no algebraicas son la sinusoide, las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas, la cicloide. Sin embargo, para hallar las envolventes es menester saber diferenciar no solo polinomios, sino también funciones más complicadas: exponenciales, trigonométricas y otras *). Además, los puntos singulares de las líneas no algebraicas pueden tener estructura muy complicada y pueden ser infinitamente muchos. Precisamente para evitar todas estas complicaciones nos hemos limitado a examinar solamente las líneas y familias algebraicas.

7. EVOLUTAS Y EVOLVENTES

Recordemos ciertas nociones introducidas en el capítulo III (pág. 47). Examinemos cierta línea curva K. En un punto arbitrario A de esta curva trazaremos una tangente a ella AD y una perpendicular AN a esta tangente (fig. 40). La recta AN se denomina *normal* a la curva K en el punto A. Si examinamos las normales de la curva K trazadas en todos los puntos de esta curva obtendremos entonces una falimia de rectas: la familia de normales de la curva K. La envolvente E de esta familia de rectas se denomina *evoluta* de la línea K que examinamos.

Tracemos normales en dos puntos próximos entre sí A, A' de la curva K. Supongamos que N, N' son aquellos puntos en los que estas normales contactan con la evoluta, y que Q es el punto de intersección de las normales AN y $A'N'$ (fig. 66). Entonces en el "triángulo" $AA'Q$, que en calidad de "base" tiene el arco AA' de la línea K, los ángulos de la base serán iguales (serán rectos,

*) Vean el libro "Qué es la diferenciación" del mismo autor (Lecciones populares de matemáticas, ed. 17) o el artículo "La integral y la derivada" en el tercer tomo de la "Enciclopedia para niños".

ya que AN y $A'N'$ son las normales). Si la base AA' fuera un segmento rectilíneo resultaría ser que, de la igualdad de los ángulos con esta base, los lados laterales AQ y $A'Q$ son iguales. No obstante, en la realidad, la base AA' está un poco encorvada y, por ello, los lados laterales AQ y $A'Q$ tan solo son aproximadamente iguales

$$AQ \approx A'Q.$$

Es más, el arco $\cup NN'$ de la evoluta está poco encorvado (¡las normales AN y $A'N'$ forman entre sí un ángulo muy pequeño!)

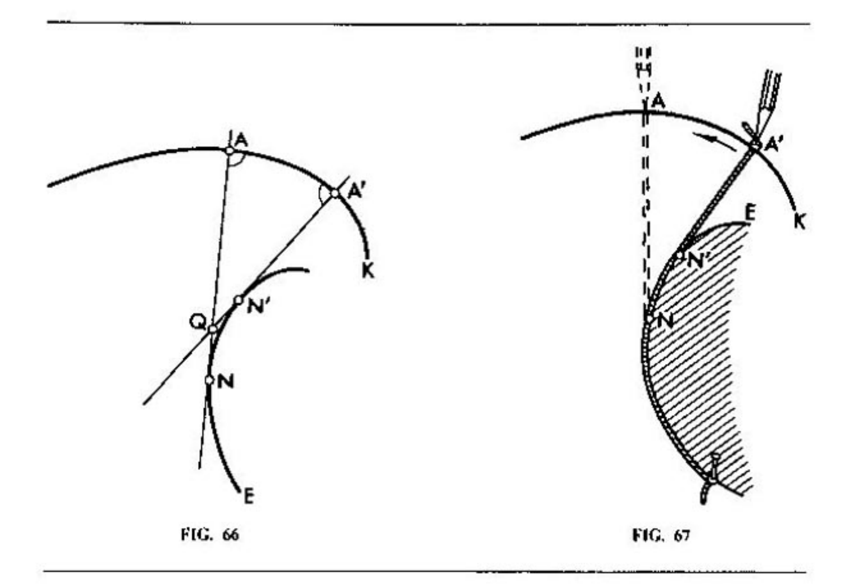


FIG. 66

FIG. 67

y, por lo tanto, la longitud de este arco se diferencia muy poco de la longitud de la línea quebrada NQN':

$$\cup NN' \approx NQ + QN'$$

De tal guisa,

$$\cup NN' \approx NQ + QN' = (AN - AQ) + (A'Q - A'N') =$$
$$= (AN - A'N') + (A'Q - AQ) \approx AN - A'N'.$$

Es notable que la igualdad aproximada que obtuvimos $\cup NN' \approx$

$\approx AN - A'N'$ en la realidad es exacta

$$\cup NN' = AN - A'N'. \quad (76)$$

Esto se demuestra sobre la base de la igualdad aproximada señalada más arriba mediante la *integración*: operación inversa a la diferenciación que se estudia en la matemática superior. Con esto la igualdad (76) es justa sin la suposición de que el arco AA' es "pequeño".

La igualdad (76) admite una interpretación muy simple y evidente. Vamos a imaginar que se ha fabricado una placa de forma de

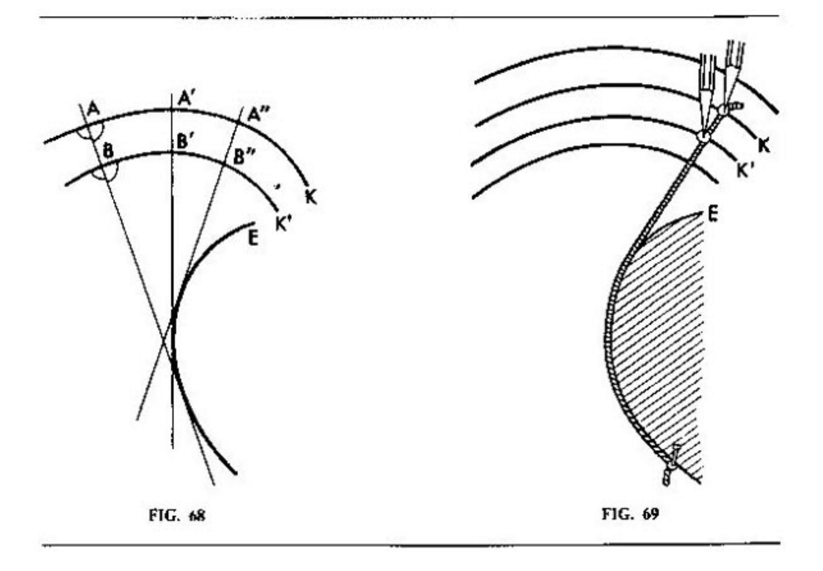


FIG. 68 FIG. 69

evoluta y que en esta placa se ha enrollado un hilo de ideal delgadez, flexible y no expansible. Admitamos que este hilo está tendido de tal manera que pasa por la evoluta hasta el punto N', siguiendo por el segmento $N'A'$ tangente a la evoluta, y que en el punto A' se ha fijado un lápiz al hilo (fig. 67). Ya que, en virtud de (76), $AN = \cup NN' + N'A'$, *el lápiz se puede desplazar al punto A, y el hilo permanecerá tenso.* Puesto que esto es justo para cualquier punto A en la línea K resulta ser que, *moviendo el lápiz de tal manera que el hilo se desenrolle de la evoluta permaneciendo tenso, describiremos con el lápiz la línea K.* Basándose en esto la línea K se denomina *evolvente* (desarrollo) de la línea E.

Así pues, si E es la evoluta de la línea K, entonces K es la evolvente de la línea E. Si ponemos el lápiz en otro punto del hilo enrollado en la línea E resultará ser que, al desenrollar el hilo, éste describirá otra evolvente de la línea E. De tal guisa, la línea E corresponde a una miltitud infinita de evolventes; para cada una de estas evolventes la línea E es la evoluta. Puesto que cada tangente a la evoluta E es normal a su evolvente K (¡la evoluta precisamente se determina como la envolvente de la familia de las normales a la curva K!), cualesquiera dos evolventes de la línea E tienen normales comunes, es decir la normal a una evolvente también es normal a la segunda (fig. 68). Con esto la longitud del segmento de la normal común, comprendido entre las dos evolventes, es constante, es decir, $AB = A'B' = A''B'' = \ldots$ Efectivamente, si fijamos *dos* lápices al hilo que se desenrolla de la evolvente de la línea E (fig. 69) resultará que estos lápices describirán dos evolventes de la línea E, y la longitud del segmento de la normal común, comprendido entre estas evolventes, permanecerá todo el tiempo igual a la longitud del segmento de hilo entre los lápices.

Si fijamos el hilo que se desenrolla de la evolvente en cierto punto N de la línea E entonces el lápiz, durante el movimiento ulterior, describirá un arco de circunferencia tangente a la línea K en el punto A (fig. 70). El radio de esta circunferencia es igual a la longitud del segmento de la normal desde el punto A hasta el punto N, en el que la normal contacta con la evoluta; el centro de la circunferencia se encuentra en el punto N (fig. 71). La circunferencia construida se denomina *circunferencia tangente* de la línea K en el punto A. Esta circunferencia se acerca máximamente a la curva del punto A en comparación con todas las circunferencias restantes. Se puede decir que el arco pequeño de la línea K cerca del punto A se comporta igual que el arco de la circunferencia tangente; en particular, el encorvamiento (curvatura) de la línea K en la proximidad del punto A, es decir, la velocidad de giro de la tangente al desplazar el punto de contacto por la línea K, coincide con el encorvamiento de la circunferencia tangente. Debido a esto el centro N de la circunferencia tangente se denomina *centro de curvatura* de la línea K en el punto A, y a su radio AN lo llaman *radio de curvatura* de la línea K en el punto A. Así pues, el radio de curvatura de la curva K en el punto A (se designa por ρ_A) es igual a la longitud del segmento de la normal desde el punto A hasta el punto N, en el que la normal contacta con la evoluta, y el centro de curvatura (punto N) yace en la evoluta. Dicho de otra manera,

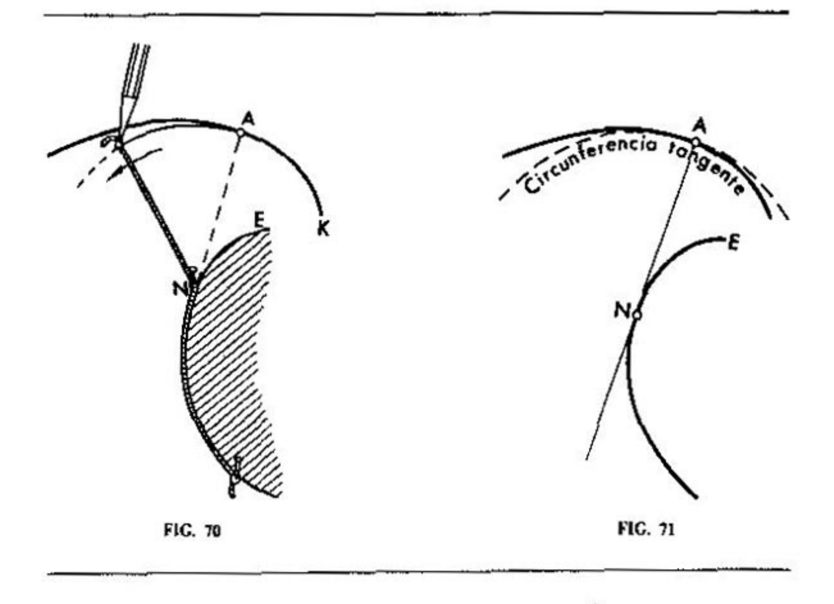


FIG. 70

FIG. 71

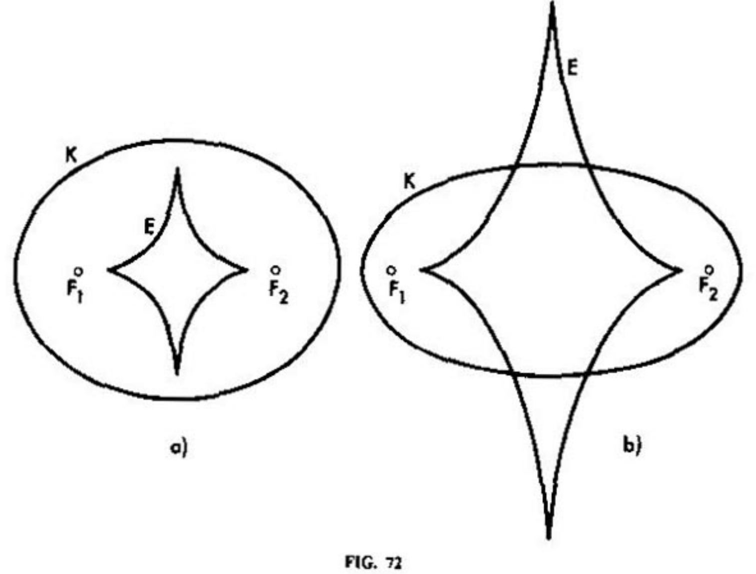


FIG. 72

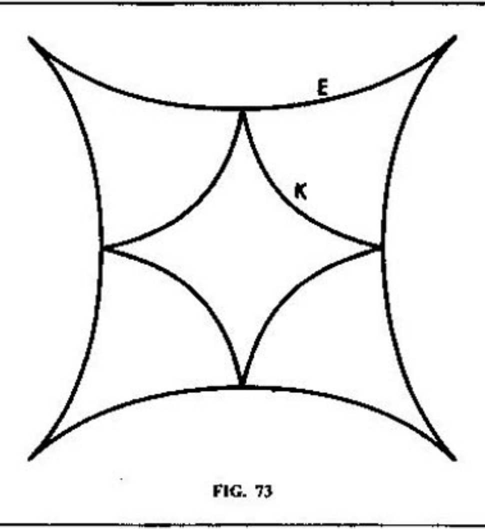


FIG. 73

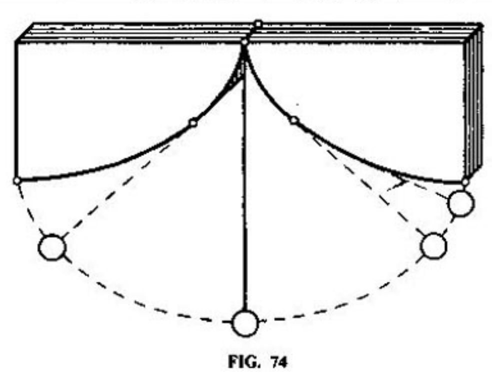


FIG. 74

la evoluta E de la curva K es el lugar geométrico de los centros de curvatura de esta curva. Anotaremos también que la igualdad (76) expresa el teorema geométrico siguiente: *la longitud del arco de la evoluta es igual a la diferencia de los radios de curvatura que corresponden a los extremos de este arco* (es decir, $\cup NN' = \rho_A - \rho_{A'}$).

De esta manera la evoluta, por sus propiedades geométricas, se encuentra estrechamente ligada a la curva inicial K. Indicaremos sin demostración de que manera, conociendo la ecuación de la línea K, se puede hallar la ecuación de su evoluta. Supongamos que la línea K está dada por la ecuación

$$f(x, y) = 0.$$

Elijamos en la curva K un punto arbitrario A; designemos a las coordenadas de éste por α y β. Como el punto A yace en la línea K las coordenadas α, β de este punto satisfacen la ecuación de la línea K, es decir

$$f(\alpha, \beta) = 0. \qquad (77)$$

En la matemática superior se demuestra que la normal a la línea K, trazada en el punto A, tiene la ecuación

$$(y - \beta) f'_\alpha(\alpha, \beta) - (x - \alpha) f'_\beta(\alpha, \beta) = 0. \qquad (78)$$

De tal guisa la familia de normales de la curva K se determina por la ecuación (78) que contiene los parámetros α, β, ligados por la relación (77). Para hallar la envolvente de esta familia, es decir, para hallar la evoluta, se debe emplear ahora el teorema 2.

Nos limitaremos a señalar tres ejemplos sin efectuar cálculos. La evoluta de la elipse (75) es la curva

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

(fig. 72, *a* y *b*); esta curva se obtiene de la astroide "alargándola" en la dirección de los ejes de ordenadas. Es más, como evoluta de la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

sirve una nueva astroide, que se obtiene de la primera aumentando semejantemente en dos veces y girando en un ángulo de 45° (fig. 73). Y, por último, señalaremos también que, como vimos en el capítulo III, la evoluta de la cicloide superior, expuesta en la fig. 43, es la inferior. Por consiguiente, la cicloide superior es la evolvente de la cicloide inferior. En esto se basa el dispositivo del *péndulo cicloidal* (fig. 74). Por detalles remitimos al lector al libro de G. N. Berman "La cicloide", que contiene muchos casos interesantes de la geometría y de la mecánica ligados con la cicloide, astroide y otras curvas que se obtienen durante la rodadura del circulo.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial 1977
"Lecciones populares de matemáticas"

Beskin N. Representaciones de figuras espaciales

Yaglom I. Algebra extraordinaria

Nentsel E. Elementos de la teoria de los juegos

Rosenfeld B., Sergueeva N. Proyección estereográfica

Natansón I. Problemas elementales de máximo y mínimo

Bársov A. Qué es programación lineal

Markushévich A. Curvas maravillosas

Markushévich A. Números complejos y representaciones conformes

Editorial MIR



Moscú